

LA GEOMETRIA I LA PARAMETRITZACIÓ COM A EINES DE DISSENY

Anna Sola Hernandez

Escola Tècnica Superior d'Arquitectura de Barcelona

<https://asola4.wixsite.com/annasola>

Tutor: Jordi Ros Ballesteros

Tribunal de tecnologia:

Maria Pilar Garcia Almirall (presidenta)

Eva Crespo Sanchez

ÍNDEX

Introducció i motivacions	3
Geometria i arquitectura	4
Generació de la forma	6
Superfícies	9
Superfícies Quàdriques	9
Hiperboloide	10
Torre Shukhov	11
Torre de Televisió de Canton	13
Catedral de Brasília	15
Paraboloide	17
Restaurant Los Manantiales	18
Catedral de Santa Maria	20
El·lipsoide	22
Mercat d'Abastaments d'Algeciras	23
Òpera de Sydney	25
Conclusions	27
Font de les imatges	28
Bibliografia	29

INTRODUCCIÓ I MOTIVACIONS

Geometria i arquitectura estan indiscutiblement relacionades, tot i això, considero que en molts casos no es fa l'esforç d'estudiar aquest vincle amb deteniment. Freqüentment s'analitzen les obres des del context, la funció, la composició, però poques vegades ens aturem a desgranar la seva forma com si es tractés d'una forma purament geomètrica i abstracta. Considero que estudiar els processos de generació de les formes arquitectòniques és una manera d'entendre els recursos descriptius que l'autor hi ha empleat, a la vegada que els assimilem per poder-hi recórrer a l'hora de dissenyar.

Així doncs, en aquest treball s'explicarà com es genera la forma constructivament, és a dir, quins elements i quins processos la componen. Aquesta explicació teòrica s'exemplificarà amb projectes on les matemàtiques i la geometria tenen un pes important. D'aquests s'analitzarà i es descriurà la seva forma d'una manera purament abstracta. L'objectiu és entendre alguns dels recursos descriptius dels què disposem a l'hora de dissenyar una forma arquitectònica. Tanmateix, penso que també és important explicar breument les circumstàncies dels projectes analitzats per saber com, quan i perquè aquests recursos han estat aplicats. Per tant, penso que serà una investigació notablement completa perquè s'abordarà el tema amb una combinació de l'abstractesa de les matemàtiques i la tangibilitat d'obres concretes.

Com és evident, tot s'acompanyarà de documentació gràfica produïda principalment amb Grasshopper. Aquest és un complement del programa CAD Rhinoceros 3D que utilitza un llenguatge de programació visual per a crear geometries a partir d'algoritmes generatius, és a dir, permet programar accions que generen geometries. Els elements de treball són nodes que representen paràmetres (elements com geometries o valors) o components (accions). Els nodes es connecten entre si mitjançant cables, aplicant les accions als paràmetres per crear nous elements. S'ha triat aquest software per diversos motius: primerament, és un programa del qual he rebut classes durant els estudis, per tant, penso que és una manera de posar en valor allò que he après i m'ha despertat especial interès. En segon lloc, crec que el paral·lelisme entre la manera d'enfocar la meua explicació sobre la generació de les formes i el seu funcionament generatiu, visual i intuitiu farà que ambdues parts resultin complementaries.

Per altra banda, el funcionament paramètric del Grasshopper permetrà parametritzar les relacions geomètriques intrínseques a les formes, demostrant que aquesta pràctica és una útil eina de disseny que fa possible més flexibilitat i experimentació.

Per aquest motiu, l'objectiu de l'anàlisi de les referències no és aconseguir una reproducció exacta de l'edifici, sinó descobrir les seves claus geomètriques per trobar el model més aproximat mitjançant la seva parametrització. Penso que l'interès rau en el procés de construcció i no en el resultat final, per tant, les obres han estat triades seguint aquest criteri.

En l'àmbit personal, entenc aquest treball com el tancament d'un cicle, com un retrobament després d'una enriquidora dispersió. Em visualitzo a mi mateixa fa uns anys, començant la carrera d'arquitectura des d'una passió per la geometria i les matemàtiques. A partir d'aquell moment, al llarg dels meus estudis m'he format en camps que disten d'aquesta disciplina, com la construcció, l'urbanisme o la història, i d'alguna manera, he acabat abandonant aquella ciència que tant m'interessava.

Així doncs, aquest treball es converteix en un retorn a aquella passió, però amb tot el coneixement adquirit durant el grau. El plantejo amb el convenciment que és possible teixir un vincle entre la geometria més abstracta i l'arquitectura construïda.

GEOMETRIA I ARQUITECTURA

La relació entre les matemàtiques i l'arquitectura és directe i indiscutible, i la branca de la qual l'arquitectura es nodreix d'una manera més evident és molt possiblement la geometria:

Geometria, del grec *γεωμετρία*, compost per:

- La paraula *γη* = terra.
- La paraula *μετρώ* = mesurar.
- El sufix *-ια* = qualitat

Originàriament la geometria era l'activitat de mesurar la Terra, però més tard, els estudis de matemàtics grecs com Tales de Milet, Pitàgores o Euclides en aquest coneixement, van portar a perfeccionar el seu concepte fins a descriure's com "la ciència de l'espai físic". Actualment, es defineix la geometria com la branca de les matemàtiques que s'ocupa dels objectes i les seves relacions en l'espai.

En aquest sentit trobem la similitud entre arquitectura i geometria. Ambdues tenen la finalitat de trobar una organització de l'espai, diferenciant-se en el nivell d'abstracció. Mentre la geometria s'encarrega de la descripció de l'espai a través de generalitats i teoremes, l'arquitectura s'ocupa de la creació d'espais concrets. L'arquitectura utilitza i posa en pràctica els coneixements abstractes de la geometria, de manera que en tot procés de disseny arquitectònic podem distingir el paper de la geometria. En alguns projectes les matemàtiques són el constituent de la idea, mentre que en d'altres, s'han emprat com a instrument per a resoldre problemes. No obstant, en la majoria dels casos, aquests dos rols es troben combinats.

El disseny d'un projecte arquitectònic respon a diversos condicionants com la funcionalitat, l'emplaçament, el moment, la sostenibilitat, la simbologia, entre altres. En qualsevol cas, com Martijn Veltkamp estableix al llibre *Free Form Structural Design*, la geometria, juntament amb el comportament estructural i la materialitat, és una de les tres variables determinants d'una forma arquitectònica.

L'evidència d'aquesta afirmació és la transformació formal que ha experimentat l'arquitectura durant els últims anys, vinculada directament amb els nous recursos digitals que han obert la possibilitat de geometries més complexes. Així doncs, la geometria és una eina per a l'arquitectura, però a la vegada és una limitació,

ja que només es pot construir allò que els coneixements o la tecnologia del moment permeten representar i definir.

Durant l'últim segle, s'han vist diversos arquitectes centrats en portar al límit els recursos geomètrics dels què disposaven amb la convicció que això els permetria resoldre problemes i descobrir noves arquitectures. Si s'analitza la seva obra, es pot identificar una important presència del component matemàtic, sigui com a clau del disseny o bé com a eina d'optimització.

Possiblement el primer arquitecte conegut que va centrar la seva obra en la relació directa de l'arquitectura i la geometria va ser Antoni Gaudí. La seva obra, construïda a finals del segle XIX i principis del XX, és el resultat d'exploracions de l'ús de la corba catenària amb les conegudes maquetes funiculars i superfícies reglades com l'hiperboloide, el paraboloide hiperbòlic (Figura 1) o l'helicoide. Molts estudis se centraven en el comportament estructural d'aquestes formes, però com el mateix Gaudí manifestava, se sentia atret per les formes curvilínies i orgàniques. A mitjans del segle XX, arquitectes i enginyers com Eduardo Torroja, el seu alumne Félix Candela o Eladio Dieste van assolir importants avenços en el camp de les estructures laminars. Aquests defensaven la idea de la forma resistent com a concepte arquitectònic i van utilitzar les matemàtiques i la geometria com a eina per a trobar formes amb un òptim comportament estructural. A les seves obres veiem que acostumaven a ser, un cop més, corbes catenàries i superfícies com l'hiperboloide, el paraboloide hiperbòlic (Figura 2), l'esfera o l'el·lipsoide.

Per altra banda, quasi a la vegada, hi va haver arquitectes que van utilitzar geometries complexes atrets per les pròpies formes, fent que aquestes fossin el constituent de les idees dels projectes. Oscar Niemeyer, per exemple, manifestava que l'atreia la corba per ser la forma que trobava a l'univers, mentre que rebutjava l'angle recte, dur i inflexible, creat per l'home. Altres exemples serien Jørn Utzon, Kenzō Tange (Figura 3) o Eero Saarinen. En les seves obres també apareixen corbes catenàries, hiperboloides, paraboloides hiperbòlics, esferes, entre altres, però d'elles no els interessava tant el seu comportament estructural, sinó l'expressivitat que aportaven als seus dissenys. Aquestes superfícies els permetien introduir formes curvilínies controladament gràcies a les lleis matemàtiques que les regeixen.



Figura 1. Porxo d'entrada de la Cripta Güell (1898-1914, Santa Coloma de Cervelló) d'Antoni Gaudí, conformat per fragments de paraboloides hiperbòlics.



Figura 2. Pavelló de Rayos Còsmics (1951, Ciudad de México) de Félix Candela, amb una coberta laminar formada per dos hiperboloides parabòlics.



Figura 3. Gimnàs Nacional Yoyogi (1964, Tokyo) de Kenzō Tange, amb la coberta suspesa generant formes curvilínies i dinàmiques.

Simultàniament, Frei Otto, arquitecte i també enginyer, investigava sobre estructures tensades (Figura 4), trobant en elles la manera de cobrir grans llums reduint considerablement el pes propi de la mateixa estructura. Aquesta extensa experimentació va permetre-li formular la seva teoria de superfícies minimal, on la geometria tenia un paper fonamental. Otto afirmava que les seves construccions eren la manifestació física de les lleis de la naturalesa dels materials, però mai va negar la monumentalitat que prenien a causa de l'ús de geometries complexes no estàndards. Un cop més, el motor de les investigacions va ser el comportament estructural de les formes, però inevitablement la geometria va ser imprescindible per als estudis analítics, la definició del disseny i l'execució de les construccions.

Frei Otto va designar aquesta pràctica com a form-finding, que consistia a fer variacions a un disseny base per tal de trobar la forma amb el millor comportament estructural. Aquesta tècnica, considerant altres aspectes a part del comportament estructural, és la que actualment es descriu amb moderns conceptes com "arquitectura paramètrica" o "disseny generatiu" entre altres, però com hem pogut veure, s'utilitza des del segle XIX.

Evidentment, l'aparició d'eines computacionals ha introduït tècniques de form-finding molt innovadores. L'essència segueix sent la recerca de la forma idònia, però aquestes eines permeten considerar moltes més variables, oferint una complexitat major i revolucionant el disseny arquitectònic. A més a més, l'arribada d'aquests nous recursos també ha portat més enllà els límits d'allò que es pot dibuixar, en conseqüència, d'allò que es pot construir. Pel que fa a la representació, s'ha popularitzat el dibuix amb NURBS, amb orígens el 1950 en la indústria automobilística, que permet definir superfícies de forma lliure a partir de punts de control. Pel que fa a la construcció, s'han hagut d'aplicar les eines computacionals per poder fer possible la materialització de les formes dissenyades. S'han desenvolupat tècniques complexes com per exemple, la fabricació digital, i s'han digitalitzat processos com l'optimització o el tessellat de les superfícies.

Un dels arquitectes pioners en aquest tipus d'arquitectura és Frank Gehry (Figura 5), però en trobem d'altres com Zaha Hadid, Toyo Ito, Shigeru Ban (Figura 6) o Norman Foster.

Així doncs, al llarg de l'últim segle hi ha hagut diversos arquitectes que per una raó o una altra han posat especial èmfasi en la geometria a l'hora de dissenyar. A les primeres referències mencionades l'ús de la geometria estava al servei d'estudis tècnics i estructurals, però progressivament hem vist que aquests rols s'han invertit i la tècnica ha passat a estar al servei de les geometries que els arquitectes desitgen. Alguns arquitectes han trobat en les formes corbes un nou llenguatge que els permet dissenyar de manera molt més lliure i expressiva, però paradoxalment, moltes vegades aquestes formes són les que requereixen més coneixements tècnics. De fet, no és estrany que darrere de projectes ideats per arquitectes possiblement amb ments prodigiosament creatives i atrevides, hi hagi un escrupolós treball tècnic dut a terme per equips enginyers com Arup, fundat per Ove Arup, o SAP, de Mutsurō Sasaki.

Dins d'aquests coneixements tècnics, hi ha d'haver un alt domini de la geometria i l'espai. Evidentment, els aspectes estructurals tenen un pes molt important i són condicionants directes de la forma final de l'edifici, però sigui quina sigui aquesta forma, haurà de ser dibuixada i definida de manera exacta i comprensible. Des d'un punt de vista abstracte i cartesià, es podria dir que tots els punts de la forma tenen una ubicació concreta que cal descriure. Com hem vist, alguns arquitectes recorren a superfícies matemàtiques com l'hiperboloide, el paraboloid hiperbòlic o l'esfera, les quals es poden descriure mitjançant equacions; d'altres, aprofitant l'arribada del disseny computacional, han pogut anar més enllà i utilitzar superfícies descrites per punts de control.



Figura 4. Pavelló Alemany de l'Expo 67 de Montreal (1967) de Frei Otto, una de les seves primeres estructures tensades, precedent a l'Estadi Olímpic de Munich.



Figura 5. Museu Guggenheim (1997, Bilbao) de Frank Gehry, uns dels primers projectes dissenyats mitjançant eines computacionals, i per tant, de forma lliure.

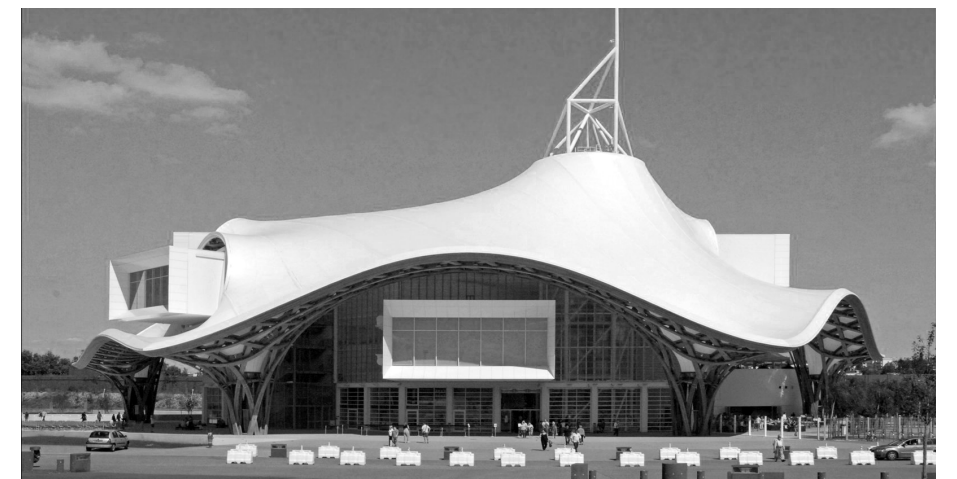


Figura 6. Centre Pompidou-Metz (2010, Metz) de Shigeru Ban, que compta amb una de les cobertes més grans i complexes construïdes fins a dia d'avui.

GENERACIÓ DE LA FORMA

Elements primitius

La generació de la forma des d'un punt de vista geomètric i constructiu comença amb 4 elements primitius, diferenciats entre ells per les seves dimensions:

- **Punt** (Figura 7): no té dimensions i s'utilitza per assenyalar una posició en l'espai, per tant, conceptualment tots els punts són iguals entre ells i es diferencien perquè se situen en posicions diferents.

- **Línia** (Figura 8): és el desplaçament d'un punt i per tant, té una sola dimensió, la longitud.

- **Pla** (Figura 9): resulta del desplaçament d'una línia i per tant, té dues dimensions. Les seves característiques són les dimensions (longitud i amplada), la forma, la superfície, l'orientació i la posició.

- **Volum** (Figura 10): és el desplaçament d'un pla i té mesures en tres direccions. Les seves característiques són les dimensions (longitud, amplada i altura), la forma i l'espai, la superfície, l'orientació i la posició.

Veiem que aquesta classificació relaciona els elements, sent el punt l'origen de qualsevol geometria. Els processos pels què se sotmet el punt i els elements resultants per arribar fins al volum són sempre desplaçaments i es poden descriure i quantificar fàcilment.

Altres classificacions inclouen la curvatura en els elements esmentats, excepte en el punt, que no l'admet. Això obre les portes a les geometries free form i dóna més flexibilitat, però conseqüentment els elements esdevenen més complexos i més difícils de definir d'una manera general i absoluta. En aquesta nova classificació, la línia, el pla i el volum passarien a ser respectivament:

- **Corba**
- **Superfície**, no necessàriament plana.
- **Volum**, sent qualsevol cos que ocupi un espai tridimensional.

En aquest cas, els processos per construir els elements a partir dels de dimensions menors no són tan evidents, tot i això, a l'aparat següent veurem que de manera més o menys complexa, totes les geometries són el resultat de la combinació de transformacions simples.

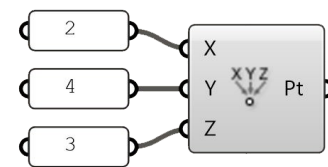


Figura 7. Punt

Constructivament, en un espai tridimensional convencional, un punt queda definit per les seves tres coordenades (x, y i z), com el de l'exemple.



Figura 9. Pla

A causa de la complexitat causada per la quantitat de característiques, el pla es pot construir de moltes maneres, totes elles relacionant aquestes característiques. A l'exemple, s'ha generat el pla entre una línia i la mateixa desplaçada.

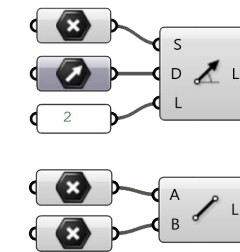


Figura 8. Línia

Es construeix a partir d'un punt, una direcció del desplaçament i una distància recorreguda. També es pot definir a partir dels seus extrems, és a dir, els dos punts corresponents a les posicions inicial i final del punt.

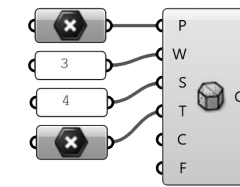


Figura 10. Volum

Com el pla, el volum és un element complex i es pot construir de diverses maneres definint algunes de les seves característiques. En aquest cas, per exemple, s'ha definit la posició del pla d'origen i la posició del pla desplaçat, així com les característiques d'aquest pla.

Transformacions dels elements primitius

La construcció de la forma és l'aplicació encadenada de certes transformacions als elements primitius, que són essencialment:

- **Extrusió** (Figura 11): es tracta de la geometria dibuixada pel desplaçament d'un element geomètric al llarg d'un vector. L'extrusió dóna una dimensió més a l'element inicial, per tant, en un espai tridimensional, l'extrusió es pot aplicar al punt, a la corba i a la superfície.

Sigui quin sigui l'element inicial, la geometria final sempre estarà formada per línies rectes. Aquesta característica és interessant sobretot en el cas de l'extrusió de la corba, ja que el resultat sempre és una superfície cilíndrica reglada. Les superfícies reglades són àmpliament utilitzades en l'arquitectura perquè permeten introduir formes curvilínies d'una manera relativament simplificada, tant pel que fa al disseny com a la construcció.

- **Escala** (Figura 12): és un procés que augmenta o redueix un element conservant les proporcions entre les seves mesures. No varia el nombre de dimensions de l'element i per tant, la tipologia inicial i la final són les mateixes. Així doncs només té sentit aplicar-lo a corbes, plans o superfícies, ja que el punt no variaria.

- **Rotació** (Figura 13): la rotació per si sola no representa cap transformació, ja que es tracta del moviment circular d'un element sense variar la seva geometria. Aquesta acció esdevé constructiva quan considerem com a geometria final la que ha estat dibuixada per l'element inicial al llarg d'aquest moviment. En aquest cas, la transformació dóna una dimensió més a la geometria inicial i per això, només es pot aplicar a punts, corbes i plans.

El resultat d'aquestes transformacions són relativament simples, però mitjançant combinacions entre elles es construeixen formes més complexes.

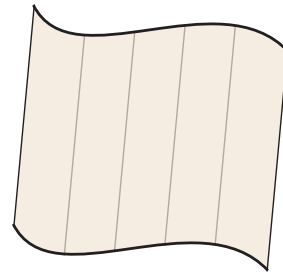
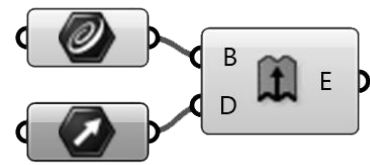


Figura 11. Extrusió

La geometria final queda definida per l'element geomètric inicial, que a l'exemple és una corba, i la direcció de l'extrusió (vector).

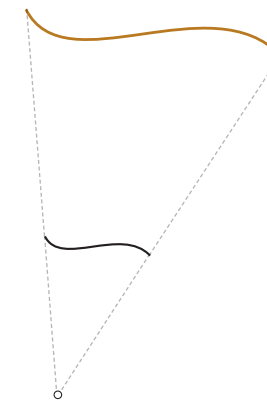
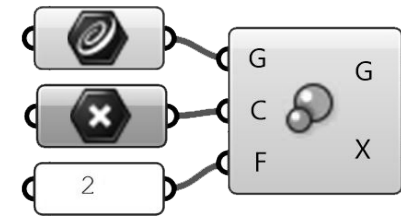


Figura 12. Escala

Es defineix la transformació d'una geometria donada amb la posició del centre de l'escala i el factor d'escalament, que determinarà si la geometria augmenta (factor major que 1) o redueix (factor entre 0 i 1). Per altra banda, un factor negatiu dóna la geometria simètrica.

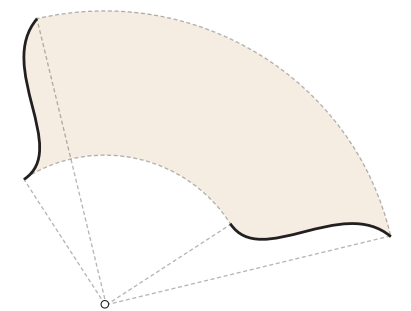
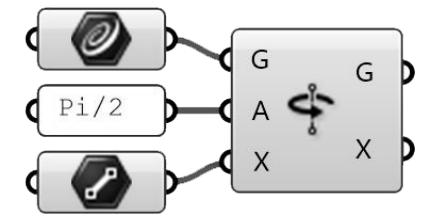


Figura 13. Rotació

Es defineix a partir de la geometria d'entrada, l'eix de rotació i l'angle de rotació. L'eix de rotació serà una recta, de la qual cal conèixer la posició i la direcció, però com passa a l'exemple, es converteix en un punt quan la rotació és en un pla.

Algunes de les combinacions possibles són les següents:

- **Extrusió + Escala** (Figura 14): es pot aplicar en corbes i superfícies, obtenint respectivament, superfícies i volums cònics, és a dir, formats per línies rectes que convergeixen en un punt, el qual serà el centre de l'escala. Així doncs, les superfícies còniques també són superfícies reglades, les quals, com hem dit, s'utilitzen bastant gràcies a la seva simplificació de les formes curvilínies.

- **Extrusió + Rotació** (Figura 15): també s'aplica a corbes o superfícies, obtenint respectivament, superfícies i volums. Aquesta combinació presenta certes variacions en funció de quan executes cada una de les transformacions. Prenent d'exemple la construcció d'una superfície a partir d'una corba, podem afirmar que el resultat serà una superfície delimitada per la corba inicial i una corba igual que la inicial, però desplaçada i rotada. Tot i que els dos extrems seran iguals, el resultat no serà el mateix si la rotació i l'extrusió es fan de manera simultània que si es construeix la superfície com una transició directa entre les dues corbes.

- **Extrusió + Escala + Rotació** (Figura 16): evidentment, aquesta operació és la que dóna més possibilitats de variacions. Per aquest motiu, podem obtenir multitud de geometries resultants amb gran complexitat, però en conseqüència, aquestes no compleixen cap condició general.

A partir d'aquestes operacions es poden crear corbes, superfícies i volums, però en termes de figures arquitectòniques, el més encertat és centrar-se sobretot en les superfícies, ja que és el recurs més estudiat i per tant, més utilitzat en projectes.

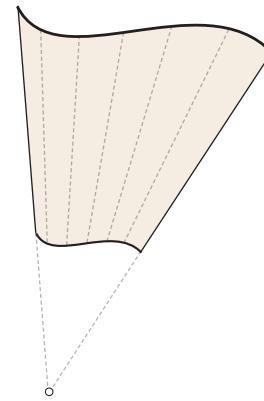


Figura 14. Extrusió + Escala
Constructivament, el resultat és la unió de la geometria inicial i l'escalada mitjançant línies rectes.

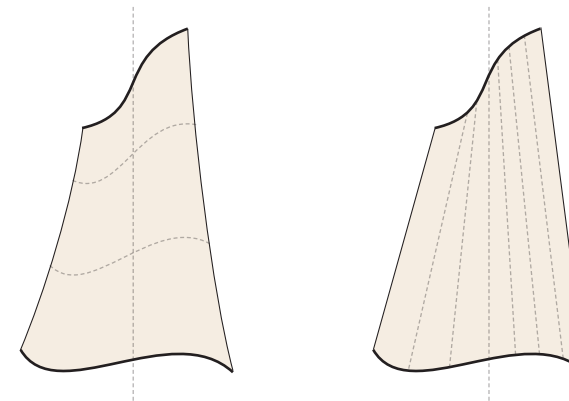


Figura 15. Extrusió + Rotació
Exemple dels diferents resultats obtinguts segons els matisos de les transformacions:
A l'esquerra, extrusió i rotació simultànies: si seccionem la superfície per plans paral·lels a la corba inicial, obtenim corbes idèntiques a aquesta.
A la dreta, transició directa entre les dues corbes: secció variant, però superfície reglada.

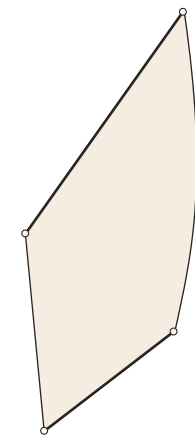


Figura 16. Extrusió + Escala + Rotació
Exemple d'una combinació d'aquestes tres transformacions.

SUPERFÍCIES

Les superfícies es poden dividir en les que segueixen una lògica matemàtica i les que no. Les primeres, anomenades superfícies quàdriques, han estat àmpliament utilitzades en l'arquitectura, ja que permeten introduir formes curvilínies als dissenys, però d'una manera controlada gràcies a les lleis geomètriques que totes elles compleixen. A més, com s'ha demostrat durant l'últim segle, algunes d'elles tenen un interessant comportament estructural. Les segones serien les que es relacionen amb el concepte de "free-form" i com aquest indica, són formes lliures que es dissenyen de manera individualitzada normalment a partir de punts de control. No s'han utilitzat fins que els recursos informàtics de disseny ho han permès.

Aquest treball centrarà la major part del seu estudi en les diferents superfícies quàdriques, ja que gràcies a la seva regularitat, permeten descriure's en termes generals. Les superfícies lliures només comparteixen el sistema de definició a partir de punts de control i no té sentit parlar de formes concretes, ja que totes elles són diferents i no mantenen cap relació.

SUPERFÍCIES QUÀDRIQUES

Les superfícies quàdriques es caracteritzen per poder-se escriure amb una equació cartesiana de la forma següent:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Kz + L = 0$$

on A, B, C, D, E, F, G no són tots nuls.

Segons els valors que prenen els coeficients, l'equació pot descriure diverses tipologies de superfícies:

- **El·lipsoide.** (Figura 17)
- **Con el·líptic.** (Figura 18)
- **Paraboloides**, que pot ser hiperbòlic o el·líptic. (Figura 19)
- **Cilindre**, que pot ser el·líptic, hiperbòlic i parabòlic. (Figura 20)
- **Hiperboloide**, que pot ser d'una o dues fulles. (Figura 21)

Tot seguit, les superfícies més recurrents en el disseny arquitectònic seran analitzades i exemplificades individualment.

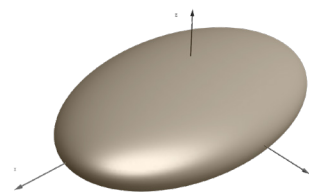


Figura 17. El·lipsoide.

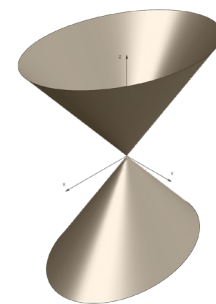


Figura 18. Con el·líptic.

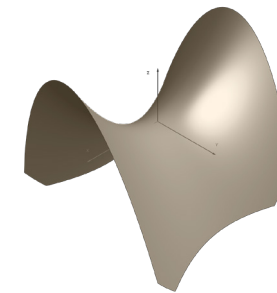


Figura 19. Paraboloides hiperbòlic (esquerra) i el·líptic (dreta).

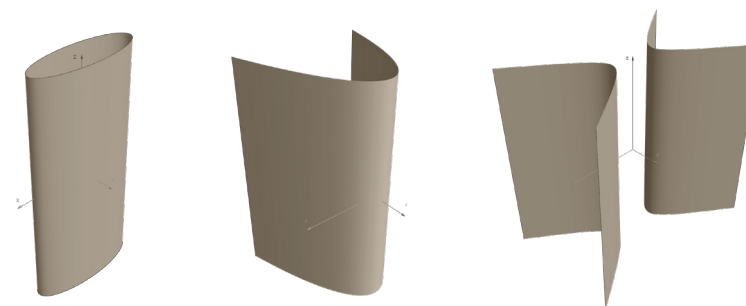


Figura 20. Cilindres el·líptic (esquerra), hiperbòlic (centre) i parabòlic (dreta).

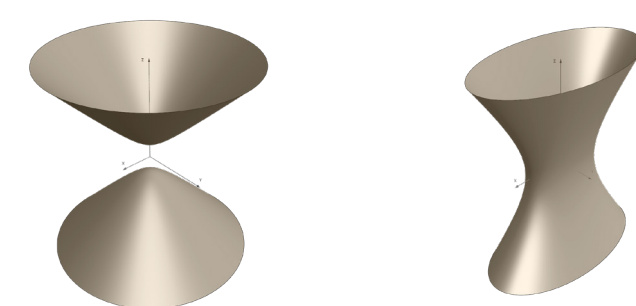


Figura 21. Hiperboloides d'una fulla (esquerra) i de dues fulles (dreta).

HIPERBOLOIDE

Conceptualment, l'hiperboloide és una superfície de revolució generada per la rotació d'una hipèrbola al voltant d'un dels seus eixos de simetria. Depenent de quin sigui l'eix de rotació, l'hiperboloide serà d'una o de dues fulles.

Prenent la hipèrbola de l'exemple (Figura 22):

- Si l'eix de rotació és el verd, l'hiperboloide resultant serà de dues fulles (Figura 23) i tindrà una equació cartesiana amb la forma següent:

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

- Si l'eix de rotació és el vermell, l'hiperboloide resultant serà d'una fulla (Figura 24) i tindrà una equació cartesiana amb la forma següent:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Així com difícilment trobem projectes que incloguin hiperboloides d'una fulla, el de dues fulles ha estat àmpliament estudiat i utilitzat. Un dels seus trets principals és que es tracta d'una superfície reglada, és a dir, es defineix amb generatrius rectes (Figura 25). Aquesta característica permet una construcció simplificada mitjançant elements rectes, ja sigui per crear entramats en estructures metàl·liques o per conformar l'encofrat en estructures de formigó.

Com veurem en els exemples, les estructures hiperboloides mitjançant entramats de bigues s'acostumen a utilitzar per edificis alts com torres. Estèticament, la forma de l'hiperboloide afavoreix aquest tipus d'edificis perquè tendeix a estilitzar-los, però l'elecció es deu sobretot a la seva estabilitat estructural, ja que està comprovat que el seu comportament estructural és millor que el d'un cilindre recte.

Constructivament, l'hiperboloide s'obté connectant dues circumferències amb línies rectes, formant un cilindre, per posteriorment, rotar una de les circumferències prenent el seu propi centre com a centre de rotació. Com veurem en els exemples, variant els radis de les circumferències, la distància entre elles i l'angle de rotació, l'hiperboloide pren proporcions diferents. (Figura 26)

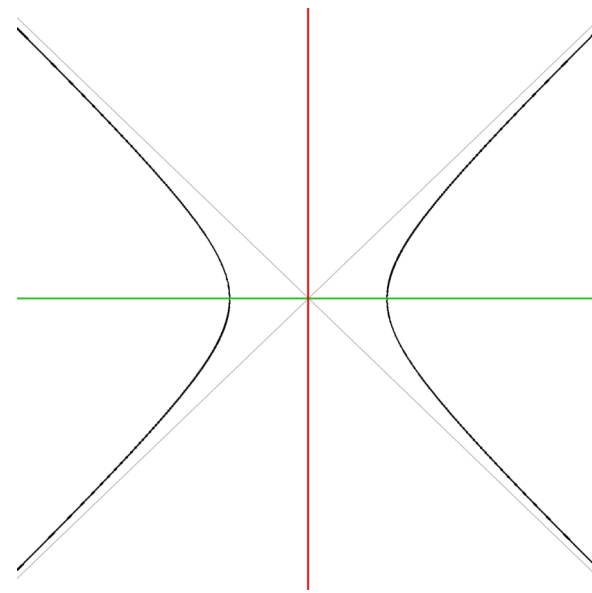


Figura 22. Exemple d'hipèrbola.

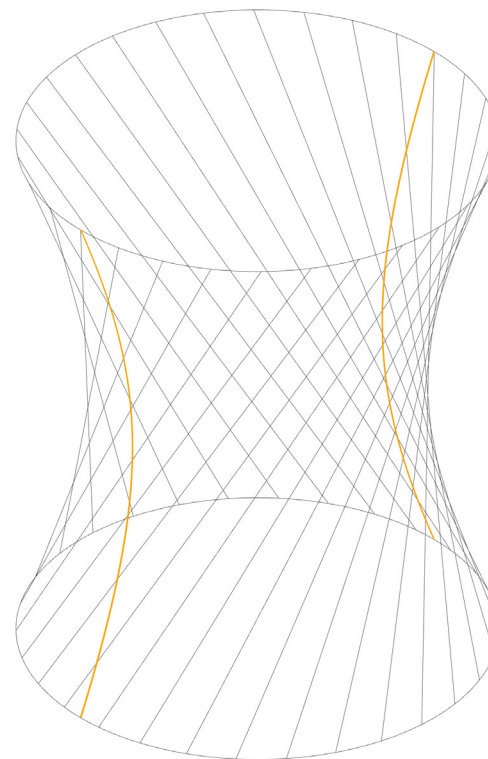


Figura 25. Hiperboloide definit a partir de les generatrius. En taronja, la hipèrbola origen de la revolució, que ahora és la intersecció de qualsevol pla vertical amb l'hiperboloide.

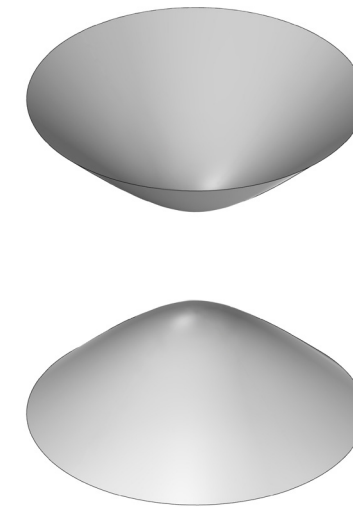


Figura 23. Hiperboloide de dues fulles.

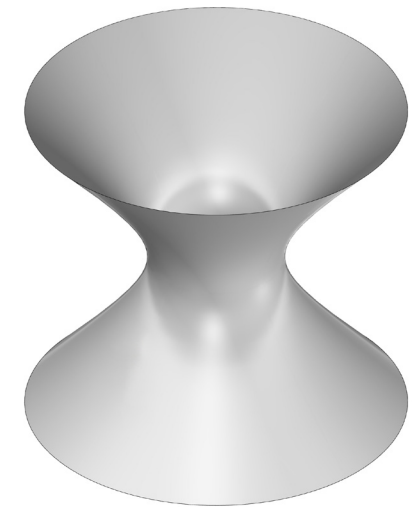


Figura 24. Hiperboloide d'una fulla.

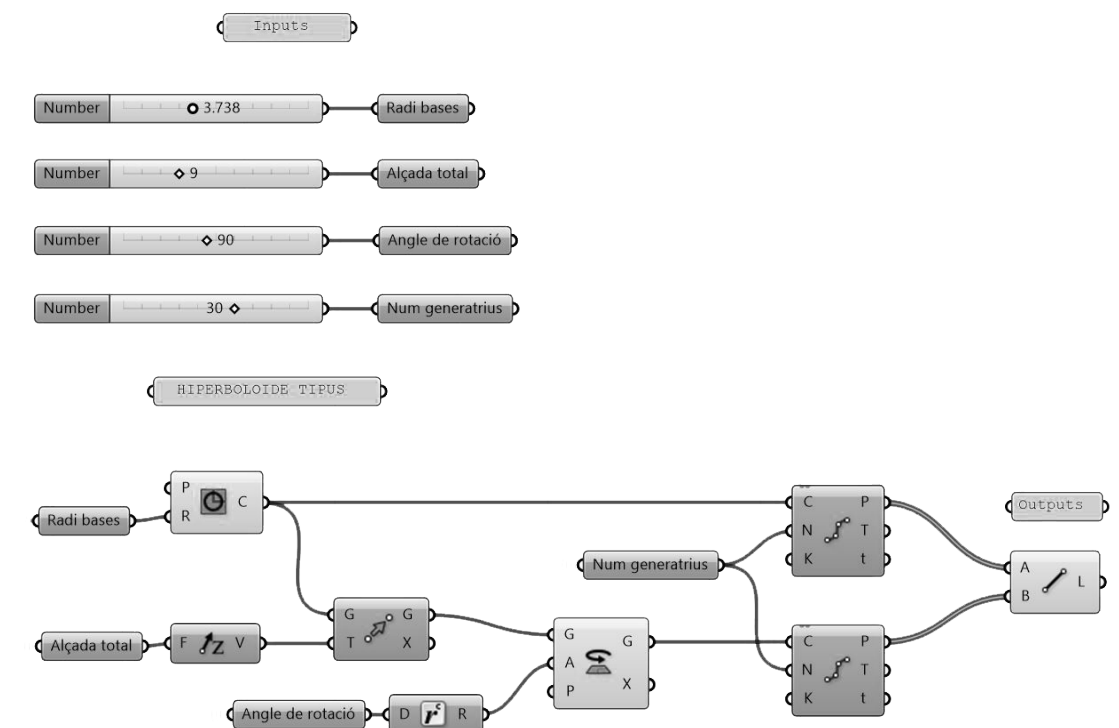


Figura 26. Construcció d'un hiperboloide d'exemple amb Grasshopper: es determina la circumferència base, es troba la base superior amb un desplaçament i una rotació d'aquesta i finalment s'uneixen amb les generatrius. Els inputs variables són el radi de les bases, l'alçada, l'angle de rotació entre les bases i el nombre de generatrius.



Figura 27. Torre Shukhov.

TORRE SHUKHOV

Vladimir Shukhov, 1918, Moscou

La torre hiperboloide va ser construïda per primera vegada el 1896, a la localitat russa de Polibino, per l'enginyer rus Vladimir Shukhov. És una torre de 37 metres formada per un lleuger entramat d'acer. Aquest tipus d'estructura va ser patentada per Shukhov, qui va seguir estudiant-la veient en ella un eficient sistema estructural per construir torres d'aigua. Gràcies a la seva forma, permetia sostenir els pesats dipòsits a les altures necessàries. Durant els següents 20 anys, va dissenyar i construir prop d'unes 200 torres hiperbòliques d'entre 12 i 68 m d'alçada.

A principis del segle XX, Shukhov va començar a investigar sobre la possibilitat de dissenyar una torre a partir de l'apilament de diversos hiperboloides. Això li permetria fer la part superior de la torre més estreta i reduir el pronunciament de la part central, resultant així una forma més cònica. El 1918 va culminar aquesta línia d'estudi amb el disseny d'una torre de comunicacions de 350 m formada per 9 hiperboloides apilats. A causa de la manca d'acer, la torre que finalment es va construir, coneguda com a Torre de Shukhov i situada a Moscou, feia 150 m d'altura i estava formada per 6 hiperboloides (Figura 27).

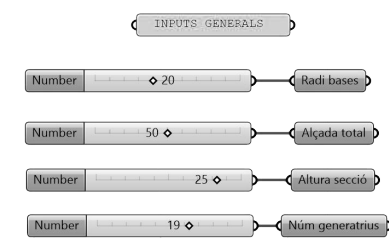


Figura 28. Inputs.

Inputs coneguts o aproximats (Figura 28):

- L'alçada de cada secció és de 25 metres.
- El radi de la base és aproximadament de 20 metres.
- El primer hiperboloide està format per dues famílies de 19 generatrius.

Partint d'aquests inputs, s'ha modelat la torre de manera parametritzada per tal de poder ajustar les variables desconegudes fins a aconseguir el model que més fidelment reproduïx la torre (Figures 29 i 30).

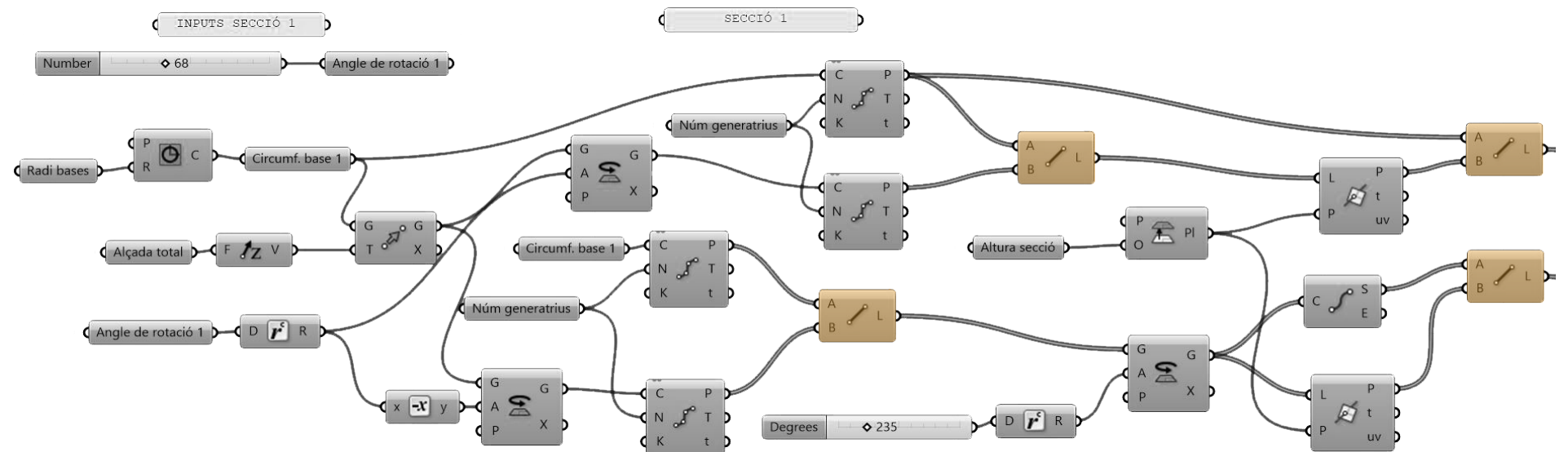


Figura 29. En primer lloc, es tracen les generatrius de la primera secció d'hiperboloide amb el procés explicat anteriorment i seguidament, se'n prenen els segments que van de la base fins a la cota 25 m. El procés es duplica perquè hi ha dues famílies de generatrius, corresponents a les barres d'acer que es creuen.

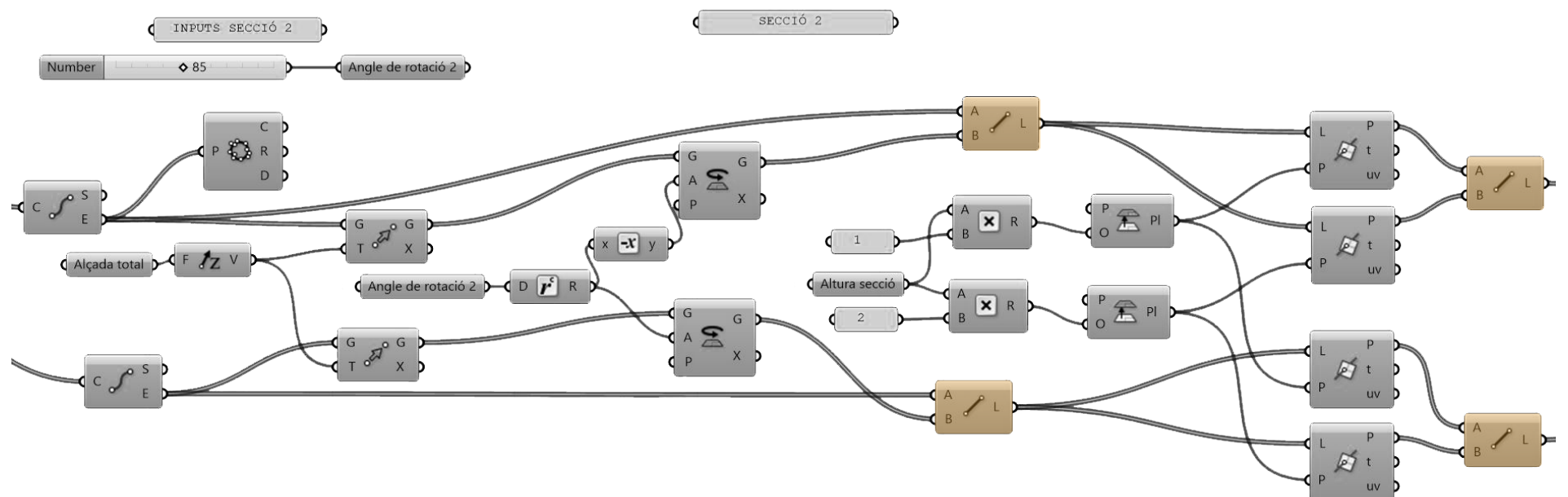


Figura 30. El segon hiperboloide es construeix mitjançant un procés similar a partir de la circumferència superior del primer. Per aconseguir la continuïtat de les generatrius entre seccions, tal com succeeix amb les barres d'acer de la torre, les generatrius del segon hiperboloide s'originen als extrems finals de les del primer. Aquest procediment es repeteix successivament fins a obtenir els 6 hiperboloides.

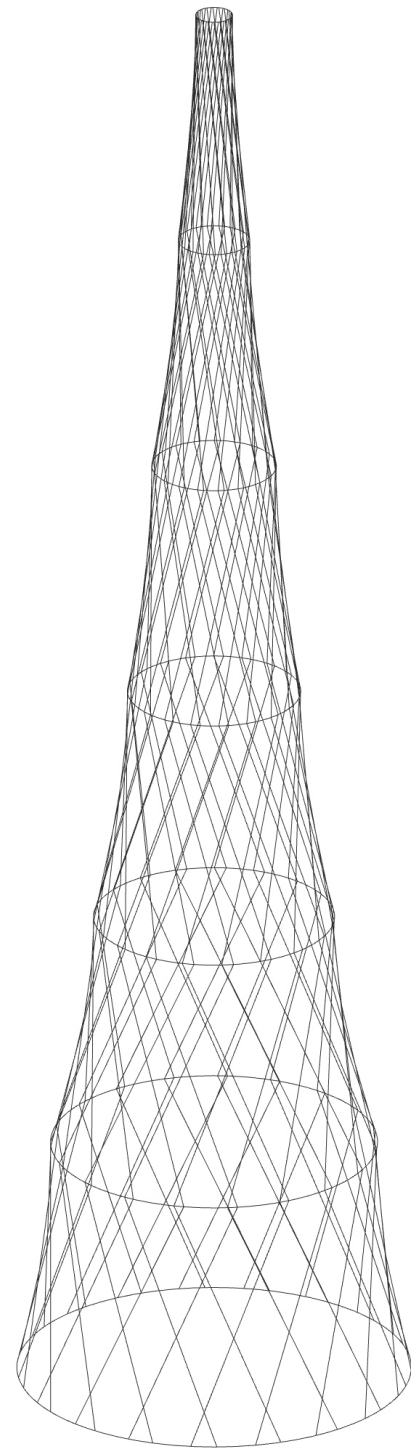


Figura 31. Model amb Grasshopper de la Torre Shukhov

Amb el procés anterior s'ha obtingut el model de la figura 31, que s'aproxima considerablement a la torre original. Gràcies a la programació parametritzada del Grasshopper que inclou les relacions geomètriques de la forma de la torre, podem experimentar amb diverses variacions alterant els inputs (Figures 32-37).

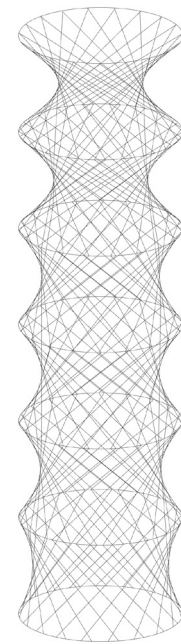


Figura 32. S'igualava l'alçada total dels hiperboloides amb la de les seccions, de manera que cada secció és un hiperboloide complet amb les bases iguals. S'observen els diferents pronunciaments causats pels angles de rotació entre bases.

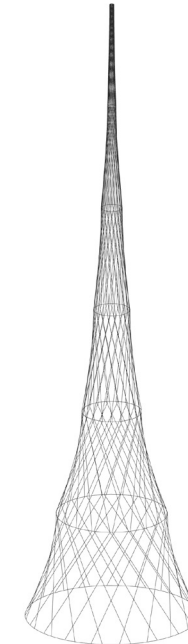


Figura 33. Augmenten els angles de rotació entre les bases dels hiperboloides. Això fa pronunciar les "cintures" i augmentar la diferència entre les bases de cada secció.

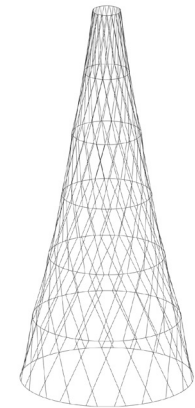


Figura 34. Disminueix l'alçada de les seccions, allunyant-nos així de les "cintures" dels hiperboloides. La torre resultant s'aproxima a una forma cònica.

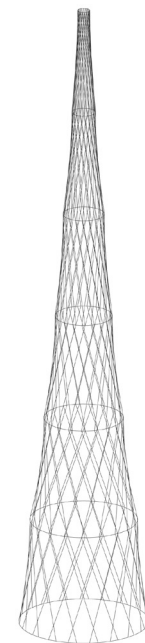


Figura 35. Es redueix el radi de base de la torre i en conseqüència, es redueixen tots els altres i queda més esvelta.

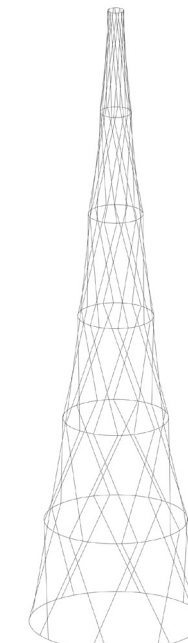


Figura 36. El nombre de generatrius passa a ser 8 en lloc de 19. Es comprova la condició de continuïtat entre les generatrius.

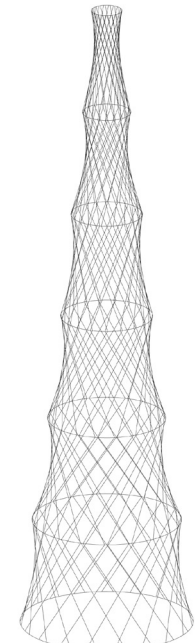


Figura 37. L'alçada dels hiperboloides complets disminueix, provocant que l'alçada de les "cintures" també baixi i aparegui a les seccions.



Figura 38. Torre de televisió de Canton.

TORRE DE TELEVISIÓ DE CANTON

IBA, 2009, Canton

La torre de Canton (Figura 38) és l'estructura hiperboloide més alta del món, amb una altura màxima és de 600m, dels quals 454m corresponen a l'hiperboloide i 146m a l'antena. Va ser dissenyada pel despatx d'arquitectes holandès IBA, amb la col·laboració d'Arup pel disseny estructural, i construïda el 2009 a Canton, Xina. Principalment, es va triar la forma d'hiperboloide per l'estreta "cintura" que crea a la seva part central. Aquesta característica dóna esveltesa i dinamisme a la torre, a la vegada que reparteix l'espai d'una manera coherent amb relació als usos, ja que al ser una torre d'observació, el programa es concentra als dos extrems. Geomètricament no és exactament un hiperboloide com el descrit anteriorment, ja que les seves bases són el·lipses en lloc de circumferències. Tot i això, conceptualment i constructivament és molt semblant perquè també es tracta d'una superfície reglada formada per les generatrius rectes que uneixen les dues el·lipses.

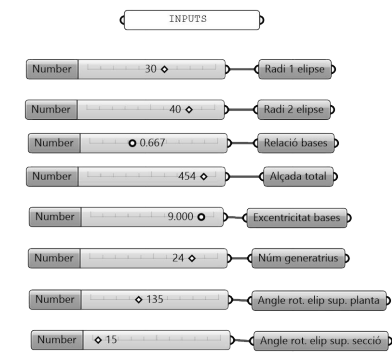


Figura 39. Inputs.

Inputs coneguts o aproximats (Figura 39):

- L'el·lipse inferior té uns radis aproximats de 40 m i 30 m i el superior és 2/3 d'aquesta.
- L'alçada màxima de l'hiperboloide és de 454 m.
- Hi ha certa excentricitat entre les dues bases, la qual s'ha aproximat a uns 9 m en sentit de l'eix major.
- S'han observat 24 tubs que uneixen les dues el·lipses, que corresponen a les generatrius.
- La rotació de l'el·lipse superior respecte l'inferior és d'uns 135° .
- La rotació de l'el·lipse superior respecte el pla horitzontal és d'uns 15° , sent l'eix major la recta de màxima pendent.

La inclinació de les generatrius, que és condicionant directe del pronunciament de la "cintura", ha estat temptejada comparant el model amb les fotografies i els plànols trobats.

Mitjançant aquesta informació, s'ha construït el model amb Grasshopper (Figura 40).

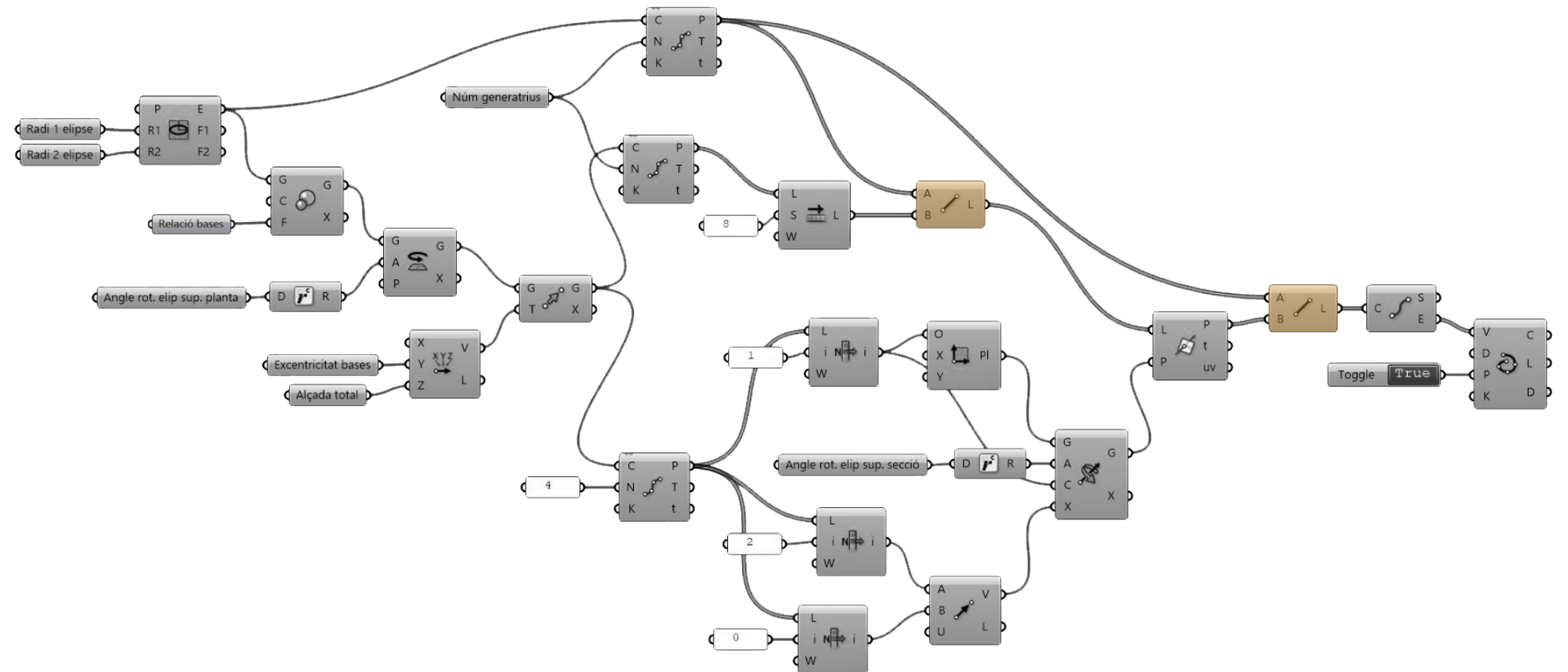


Figura 40. El procés de construcció ha seguit la mateixa lògica que el d'un hiperboloide circular: a partir de l'el·lipse de la base, s'ha obtingut la base superior. Aquestes dues el·lipses s'han connectat mitjançant les generatrius, les quals s'han tallat amb el pla inclinat 15° corresponent a la base superior.

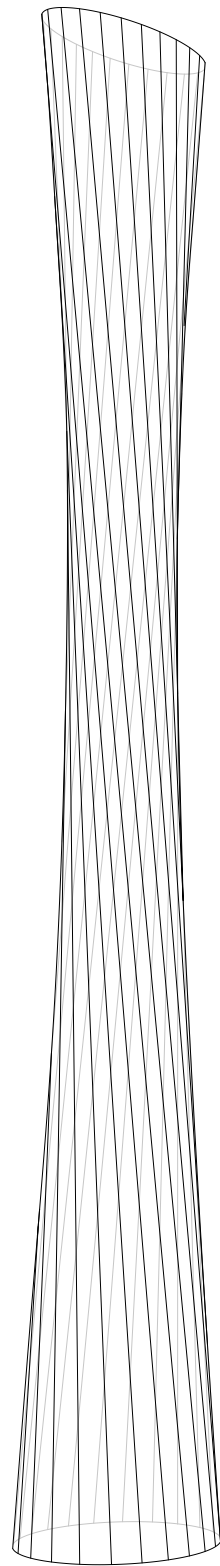


Figura 41. Model amb Grasshopper de la Torre Canton

El resultat obtingut és satisfactòriament semblant a la torre real (Figura 41).

Gràcies a la parametrització del modelatge i la forma geomètrica de l'edifici, s'ha pogut experimentar amb les variables observant de quina manera incideixen a la forma (Figures 42-47).

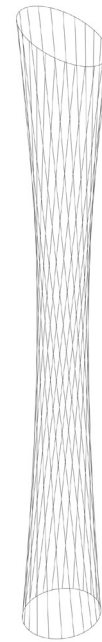


Figura 42. S'estableix que les dues bases tinguin les mateixes dimensions, per això la torre s'eixampla més a la part superior, i en conseqüència, a la part central també.

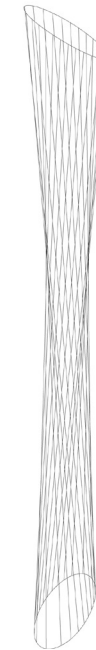


Figura 43. S'ha alterat la proporció de l'el·lipse inferior, provocant també la deformació a l'el·lipse superior a causa de la seva relació.

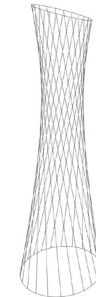


Figura 44. Es redueix l'altura de la torre. La transició de les bases a la "cintura" és més curta, per això l'estrenyiment sembla més pronunciat.

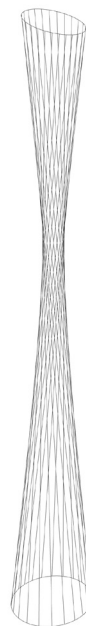


Figura 45. Variant la rotació de la base superior respecte la inferior, s'altera la pronunciació de la "cintura".

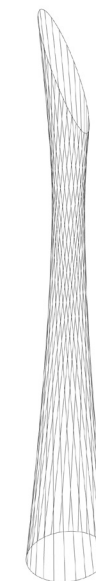


Figura 46. Es pot variar la inclinació de la base superior, complint sempre que el punt més alt es manté l'altura total establerta.

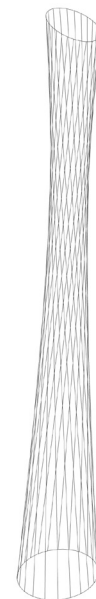


Figura 47. L'excentricitat de la base superior respecte la inferior, augmenta, fent que la torre esdevingui inclinada.



Figura 48. Catedral de Brasília

CATEDRAL DE BRASÍLIA

Oscar Niemeyer, 1958-1970, Brasília

La Catedral Metropolitana Nossa Senhora Aparecida va ser dissenyada per l'arquitecte Oscar Niemeyer, amb la col·laboració de l'enginyer Joaquim Cardozo en el projecte estructural (Figura 48). L'estructura es va construir entre el 1958 i el 1960, però l'edifici no va ser completat fins al 1970.

Va ser la primera estructura del que es convertiria en la capital de Brasil i com a tal, pretenia evocar la modernitat, la riquesa i la importància de la cultura que es volia reflectir amb la nova ciutat. Per tant, en aquest cas, Niemeyer va elegir l'hiperboloide per l'expressivitat i la monumentalitat que li donava aquesta forma. A més, com veiem, l'hiperboloide fa que l'edifici s'obri a la base, donant una gran capacitat al temple, i es tanca a la part superior, congestionant l'espai en direcció al cel. Així doncs, la forma també és oportuna funcionalment i simbòlicament.

L'estructura en forma d'hiperboloide és el resultat de setze columnes de formigó, amb els extrems acabats en punxa, que entren en contacte a la cintura de l'hiperboloide, on la seva secció és major.

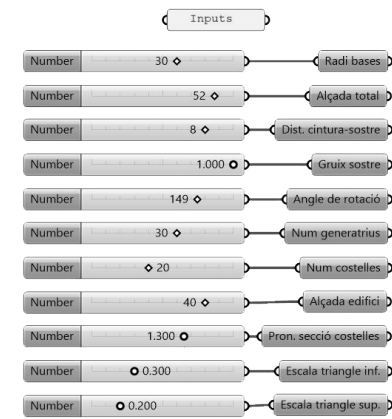


Figura 49. Inputs.

Inputs coneguts o aproximats (Figura 49):

- Es coneix que el diàmetre de la base és d'uns 60 m.
- Es coneix que l'alçada de l'edifici és d'uns 40 m.
- S'ha temptejat l'angle de rotació entre les dues circumferències per tal que la cintura de l'hiperboloide tingui els 16 m de diàmetre que s'han aproximat.

La resta d'inputs, que fan referència a l'alçada de l'hiperboloide complet, a la secció de les costelles o a les característiques del sostre, s'han establert a partir de la comparació del model amb les fotografies.

En aquest cas, les generatrius de l'hiperboloide no estan materialitzades, però la seva construcció geomètrica, i per tant la que s'ha dut a terme amb Grasshopper, es basa igualment en la unió de dues circumferències mitjançant línies rectes (Figures 50 i 51).

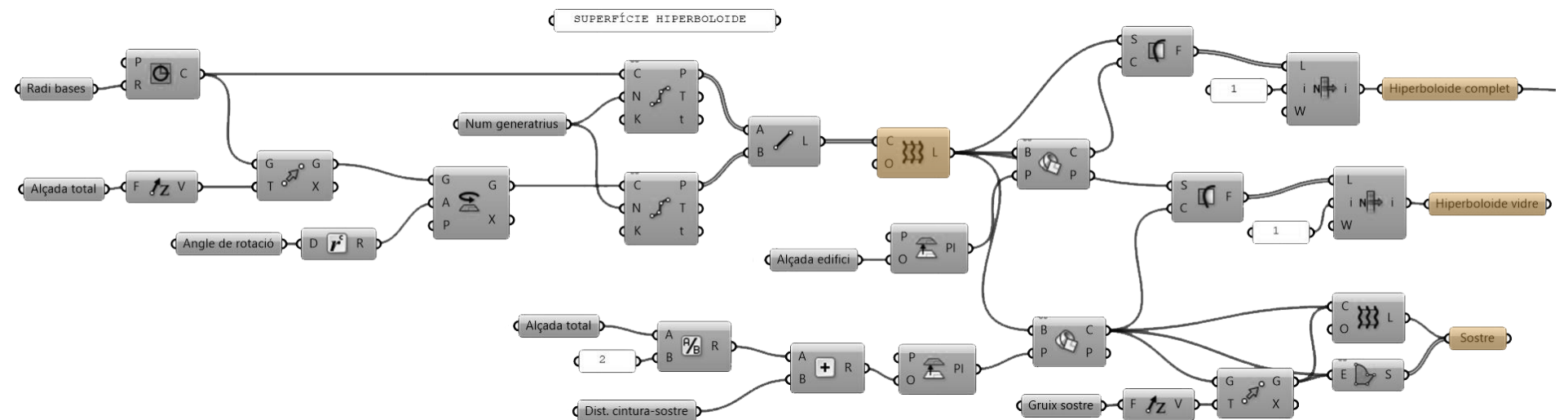


Figura 50. El procés de modelatge és el mateix que l'explicat per l'hiperboloide tipus. En primer lloc, es construeix l'hiperboloide sencer com una superfície. Sobre aquesta superfície es fan dues divisions: una per determinar l'hiperboloide implícit en les costelles i l'altra, per trobar l'hiperboloide corresponent al parament real de vidre, sobre el qual es construeix el sostre.

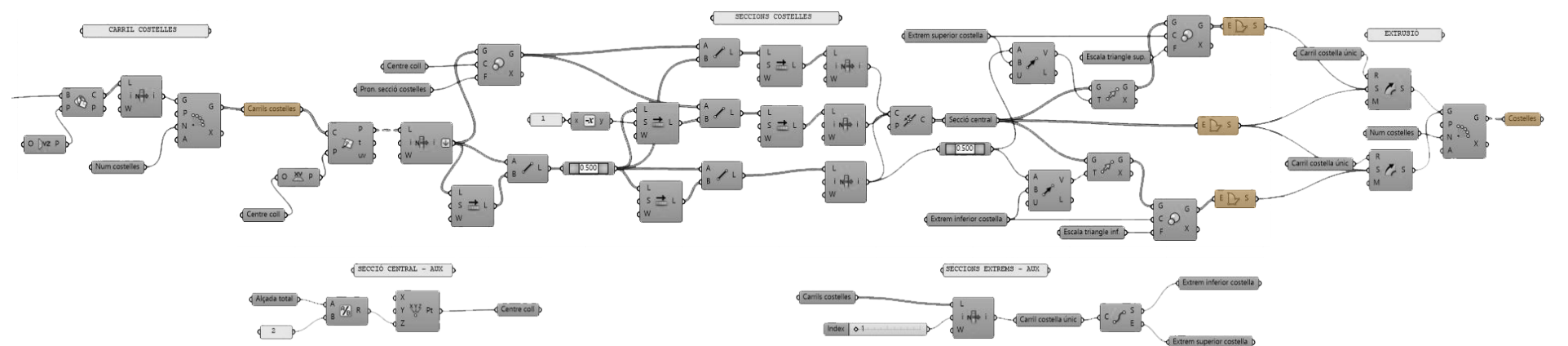


Figura 51. Es busca el carril directriu d'un dels pilars, que correspon a una hipèrbola (intersecció entre l'hiperboloide i un pla vertical que passa pel seu centre). Sobre aquesta corba, es dibuixen les seccions significatives del pilar per tal de generar el seu volum mitjançant una extrusió al llarg del carril directriu trobat. Tenint un pilar, només queda fer una matriu polar per trobar els 16 restants, que en essència, és una successió de rotacions.

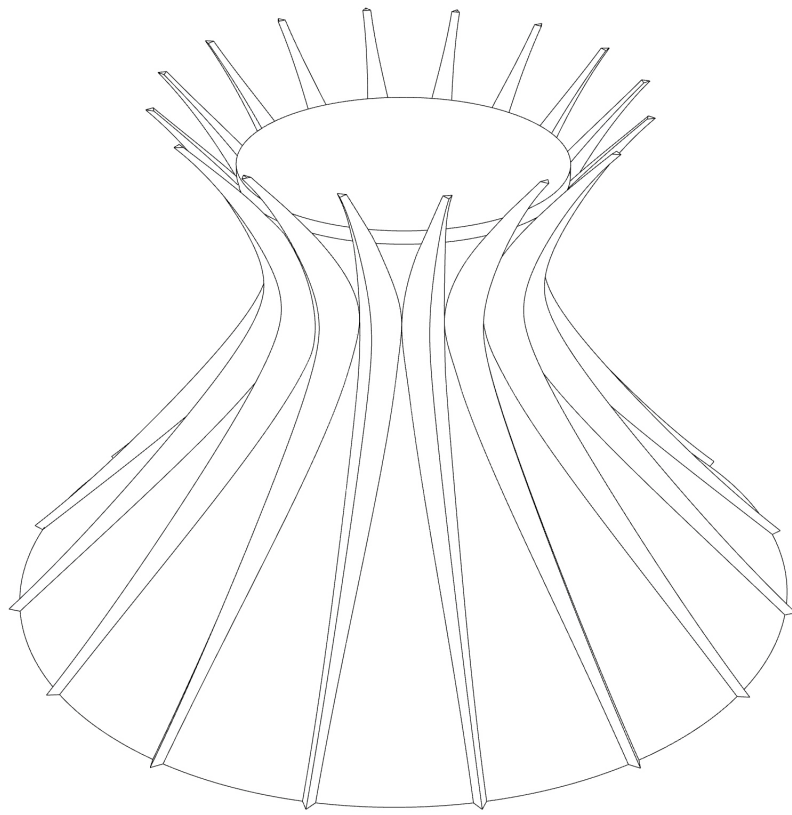


Figura 52. Model amb Grasshopper de la Torre Canton

Comparant el model obtingut (Figura 52) i l'edifici real, podem dir que hi ha una diferència relativament visible als extrems superiors dels pilars. S'observa que a l'edifici real aquests són més verticals. Després d'intentar ajustar els paràmetres, s'ha conclòs que aquesta diferència es deu al fet que la forma de l'edifici no és un hiperboloide perfecte.

Malgrat això, es considera que el resultat és satisfactori, ja que es compleixen les condicions inicialment establertes i la seva construcció parametritzada permet experimentar variacions (Figures 53-58).

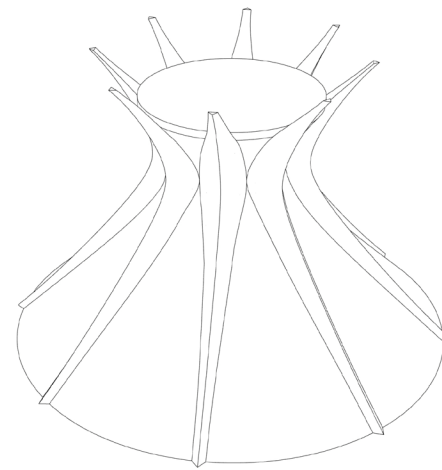


Figura 53. Es redueix el nombre de costelles a la meitat, tot i això, mantenen la condició d'entrar en contacte a la "cintura", on la seva secció és major.

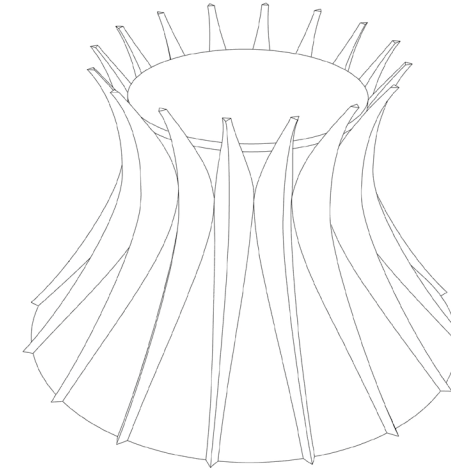


Figura 54. Es redueix l'angle de rotació de la base superior de l'hiperboloide respecte a la inferior. En conseqüència augmenta el radi de la part central.

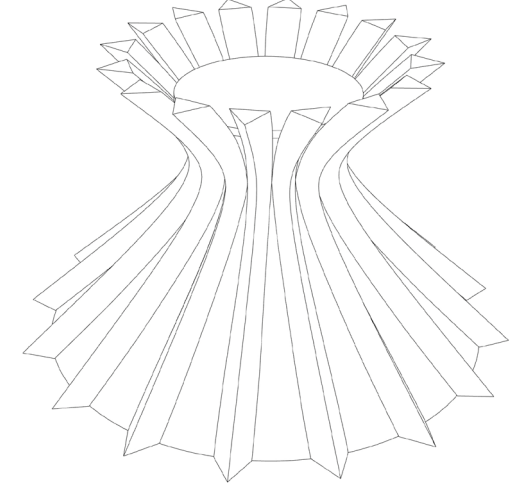


Figura 55. Les seccions dels extrems de les costelles són el resultat de l'aplicació d'una escala a la secció central. A l'edifici real, el factor d'escala és menor que 1 per obtenir les formes punxegudes, en canvi, en aquest exemple s'ha establert a 1,5.

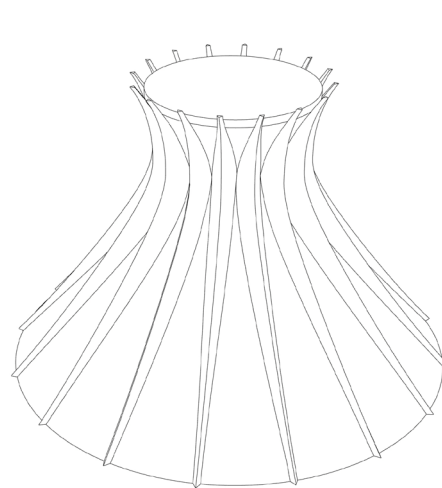


Figura 56. Es fa l'hiperboloide original més alt, fet que fa pujar l'altura de la "cintura". Com que la cota del sostre és relativa a la de la "cintura", aquest també puja.

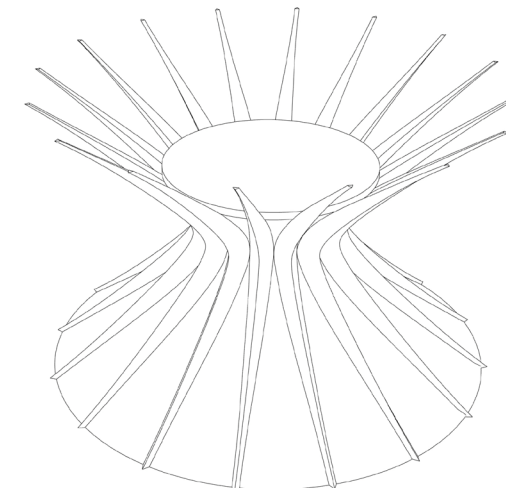


Figura 57. L'altura de l'hiperboloide s'ha reduït fins a igualar la de l'edifici, de manera que apareix l'hiperboloide sencer i les costelles dibuixen perfectes hipèrboles.

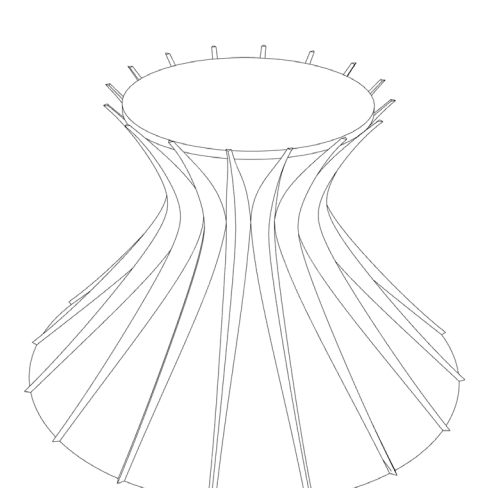


Figura 58. La distància entre la cota de la "cintura" i el sostre també és un paràmetre. En el model de l'exemple, aquesta distància s'ha augmentat.

PARABOLOIDE

El paraboloides és una superfície quàdrica que pren una forma o una altra segons els signes de la seva equació:

- Paraboloides el·líptic (Figura 59):

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 - z = 0$$

- Paraboloides hiperbòlic (Figura 60):

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 - z = 0$$

Pel que fa a l'arquitectura, té més interès el paraboloides hiperbòlic, ja que és una superfície reglada i en conseqüència, és una forma bastant recurrent. A més, tal com van estudiar i demostrar arquitectes com Antoni Gaudí o sobretot, Félix Candela, té un molt bon rendiment estructural degut a que és una superfície no desenvolupable, és a dir, no es pot desplegar sobre un pla. Això permet fer grans cobertes amb gruixos molt reduïts.

Geomètricament, el paraboloides hiperbòlic és l'extrusió d'una paràbola amb la concavitat cap avall al llarg d'una altra paràbola amb la concavitat cap amunt, per tant té doble curvatura. A més, la seva intersecció amb qualsevol pla horitzontal dóna de resultat una hipèrbola.

Una altra característica és que un paraboloides hiperbòlic es pot determinar a partir de quatre punts no coplanars, ja que donats aquests quatre punts, només hi ha un paraboloides hiperbòlic que passi per tots.

Constructivament, el paraboloides hiperbòlic s'obté a partir de la connexió amb línies rectes dels dos segments que, sense creuar-se, uneixen aquests quatre punts dos a dos. Aquest grup de rectes són les anomenades generatrius. Com que es poden traçar dues parelles de segments, un mateix paraboloides conté dues famílies de generatrius (Figura 61 i 62).

Des d'aquest punt de vista, els únics paràmetres que podem alterar en la generació d'un paraboloides hiperbòlic són les posicions dels quatre punts. Variant aquests valors podem modificar la curvatura de la superfície. Per altra banda, als exemples veurem que sovint no apareix el paraboloides amb els quatre costats, així que la resta de variables seran les que determinaran quina part es pren.

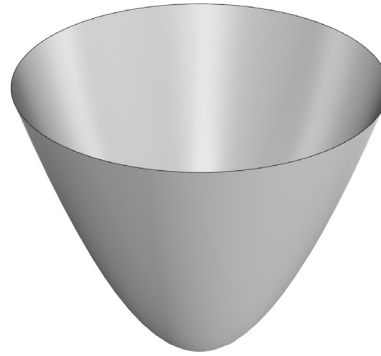


Figura 59. Exemple de paraboloides el·líptic.

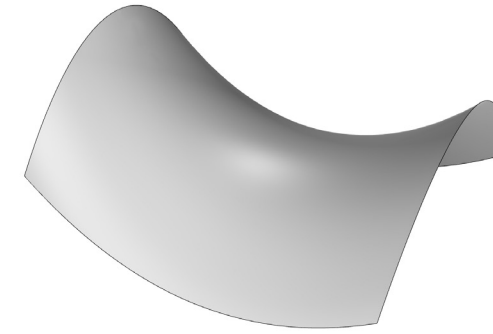


Figura 60. Exemple de paraboloides hiperbòlic

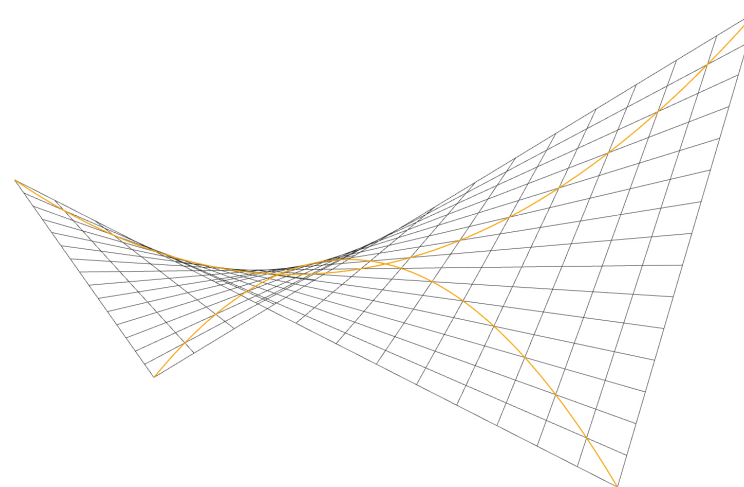


Figura 61. Paraboloides hiperbòlic definit a partir de les dues famílies de generatrius. En taronja, les dues paràboles d'origen, que alhora són la intersecció dels plans verticals perpendiculars.

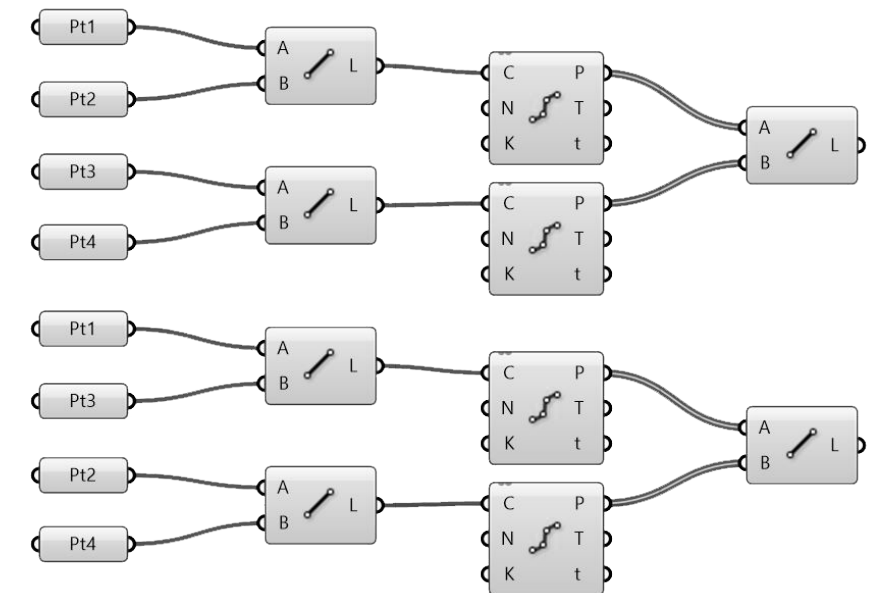


Figura 62. Construcció d'un paraboloides hiperbòlic d'exemple amb Grasshopper: donats els quatre punts, es tracen dues línies unint-los dos a dos. Seguidament, aquestes línies s'uneixen amb les que seran les generatrius. Per obtenir l'altra família de generatrius, es repeteix el procés canviant les parelles de punts inicials.



Figura 63. Estructura del restaurant Los Manantiales

RESTAURANT LOS MANANTIALES

Félix Candela, 1957, Xochimilco (Ciudad de México)

Félix Candela va destacar pel seu paper en el desenvolupament d'estructures laminars de formigó armat. Va replantejar la visió de l'arquitecte envers els problemes estructurals partint del concepte de forma resistent, el quan incloïa les seves tres premisses: economia, senzillesa de càlcul i flexibilitat.

Una de les formes més estudiades per Candela va ser el paraboloides hiperbòlic, atret per la rigidesa aconseguida amb la doble curvatura i per la possibilitat d'encofrar el formigó seguint les generatrius rectes. El restaurant Los Manantiales és un exemple significatiu de la materialització d'aquesta forma (Figura 63).

Aquest edifici està format per la intersecció de quatre grans paraboloides hiperbòlics d'un gruix molt reduït i amb 8 punts de suport, component així una planta octogonal de 42 m de diàmetre. Aquesta estructura és fruit de les aptituds de Candela en aquest camp, però gràcies a aquestes característiques, també assoleix els objectius formals i funcionals. La forma resultant s'integra als jardins on se situa l'edifici com un objecte flotant i lleuger que s'assimila a una flor de lotus. A més, la gran coberta amb pocs recolzaments genera una espaiosa planta lliure amb capacitat per unes 1000 persones.

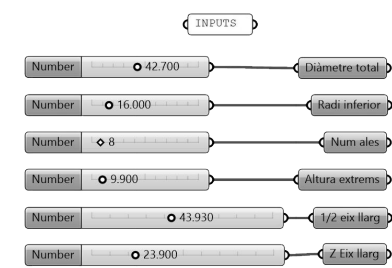


Figura 64. Inputs.

Inputs coneguts o aproximats (Figura 64):

- Es coneix que el diàmetre total és de 42,7 m.
- S'ha aproximat que el radi dels punts de recolzament és d'uns 16 m.
- L'altura màxima de les ales és d'uns 9,9 m.

La posició dels vèrtexs directrius de l'hiperboloide parabòlic s'han ajustat fins a aconseguir la forma desitjada. Mitjançant aquesta informació, s'ha modelat d'edifici mitjançant Grasshopper (Figures 65 i 66).

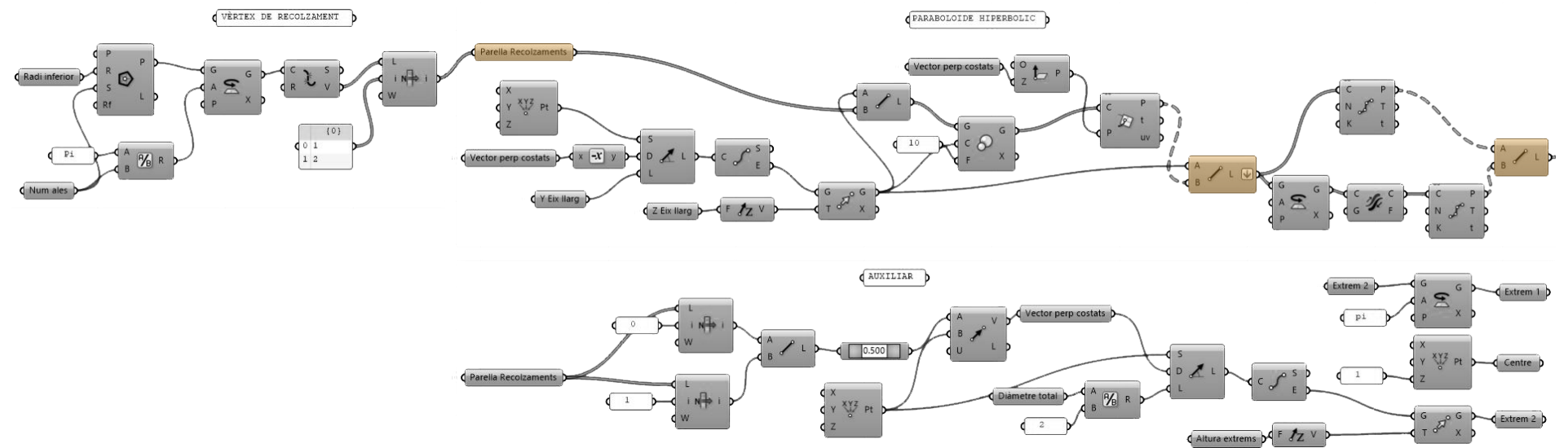


Figura 65. El procés de modelatge ha consistit a obtenir un paraboloides, per posteriorment aplicar una matriu polar. En primer lloc, s'ha buscat una de les parelles de recolzaments d'aquest paraboloides, considerant que el paraboloides hiperbòlic havia de passar-hi. Posteriorment s'han determinat un dels vèrtexs directrius i el seu simètric. Tenint aquesta informació, s'han traçat els costats de l'hiperboloide per unir-los mitjançant les generatrius.

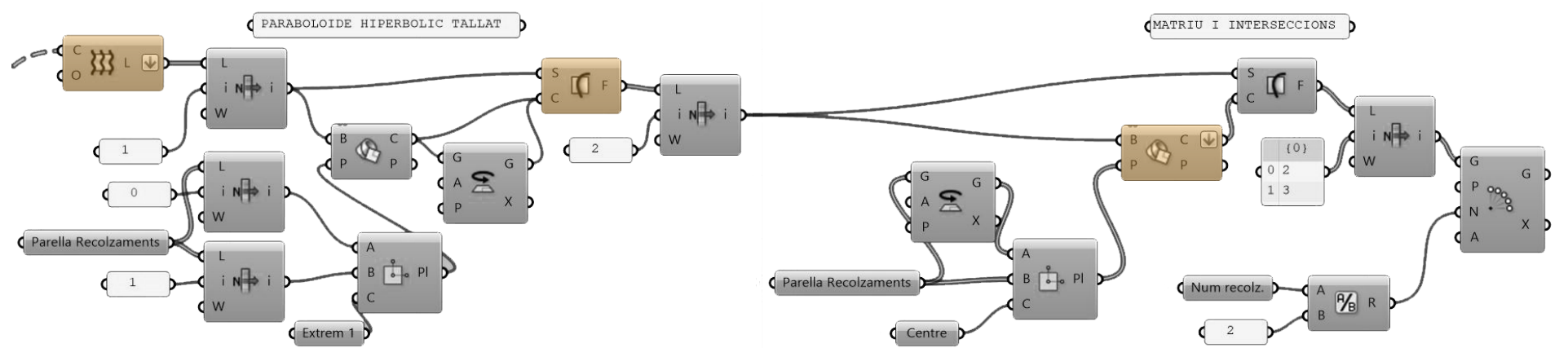


Figura 66. El procés ha continuat generant la superfície del paraboloides complet a partir de les generatrius. D'aquesta superfície, s'han retallat les puntes per obtenir els extrems parabòlics de les ales. Tot seguit, s'ha tallat amb els plans verticals corresponents a les interseccions amb els altres paraboloides per aconseguir la superfície real que es pren del paraboloides complet. Per últim, s'ha efectuat la matriu polar.

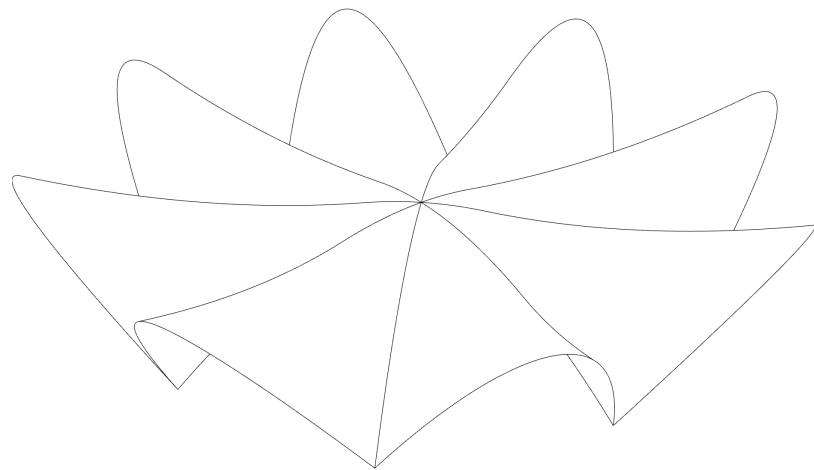


Figura 67. Model amb Grasshopper del restaurant Los Manantiales.

Amb les dades aconseguides s'ha obtingut un model que reproduceix fidelment l'edifici real (Figura 67).

En el modelatge d'aquest edifici, ha estat especialment útil la parametrització, ja que a partir de la informació prèvia era difícil determinar exactament la forma dels paraboloides hiperbòlics. Aquesta parametrització també ha permès experimentar diferents variacions del model (Figures 68-73).

Podem observar que el paraboloide hiperbòlic, si està subjecte a certes condicions, és una superfície poc flexible formalment. En aquest cas, que l'edifici només està format per paraboloides i que aquests estan posicionats d'una manera molt determinada, únicament podem modificar el nombre de paraboloides, l'extensió de les ales i la curvatura de la superfície, i en molts casos, els resultats són semblants.

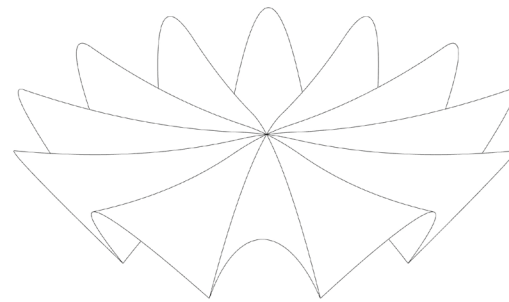


Figura 68. Es passa de 4 a 6 paraboloides, formant així 12 ales. Consegüentment, els punts de recolzament s'acosten, augmentant la curvatura del paraboloide en aquest sentit.

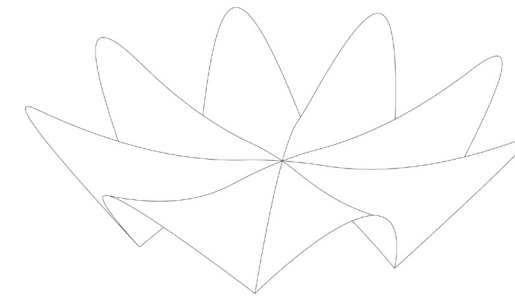


Figura 69. Els punts directrius superiors del paraboloide s'han acostat entre ells, sense modificar la seva altura. Això fa pronunciar la curvatura de la superfície en sentit longitudinal, aixecant els extrems de les ales i rebaixant el punt central de l'edifici.

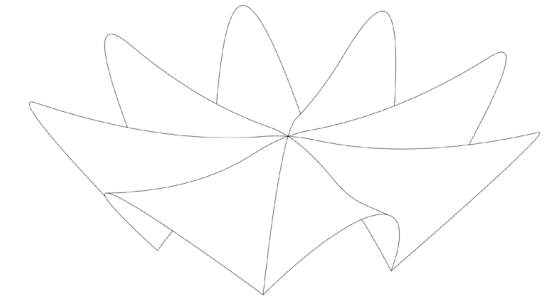


Figura 70. En aquest cas, s'ha augmentat l'altura dels punts directrius superiors. Aquesta variació implica un aixecament tant dels extrems com del punt central, pronunciant així la curvatura en sentit transversal.

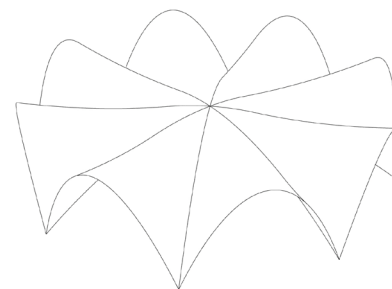


Figura 71. Cas particular en què el diàmetre dels extrems de les ales disminueix fins a igualar el dels recolzaments. La planta de l'edifici esdevé una circumferència.

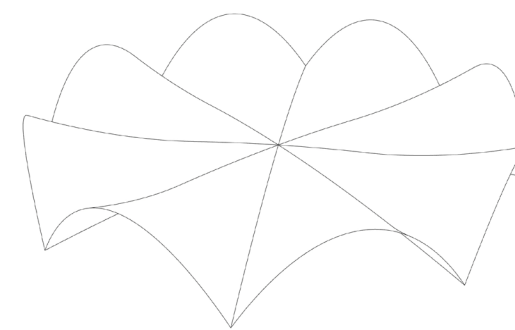


Figura 72. Cas particular en què el diàmetre dels recolzaments augmenta fins a igualar el dels extrems de les ales. La planta pren forma d'octàgon.

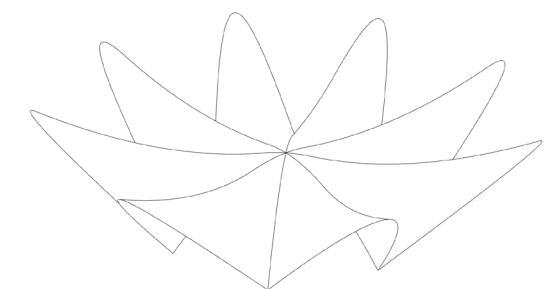


Figura 73. S'augmenta el diàmetre de l'edifici. En conseqüència, s'estenen els extrems de les ales i la porció de paraboloide que es materialitza és major.



Figura 74. Catedral de Santa Maria

CATEDRAL DE SANTA MARIA

Kenzō Tange, 1964, Tokyo

La Catedral de Santa Maria (Figura 74), va ser dissenyada per l'arquitecte japonès Kenzō Tange, juntament amb l'enginyer Yoshikatsu Tsuboi. Kenzō Tange afirmava que els dissenys havien de combinar tecnologia i humanitat, tenia la convicció que l'arquitectura havia d'arribar al cor de les persones però alhora, havia de respondre a la lògica.

Per a aquesta catedral, va visitar diversos exemples gòtics medievals i atret pels seus grans espais místics, va començar a imaginar nous espais creats mitjançant la tecnologia moderna.

Geomètricament, la catedral està formada per 8 paraboloides hiperbòlics que converteixen la planta romboidal de la base en la creu llatina de la part superior. El punt més baix de l'edifici correspon al centre de la creu, de manera que les ales descendeixen des dels extrems cap aquest punt. Les ales són asimètriques, sent la de l'altar la més alta, i en cada una s'obre una esclatxa de llum com a resultat de la separació dels paraboloides.

Tal com Tange s'imaginava, l'ús del formigó, l'entrada de llum, la curvatura dels paraboloides i la resta de característiques, creen una atmosfera mística mitjançant un escrupolós i modern treball tècnic.

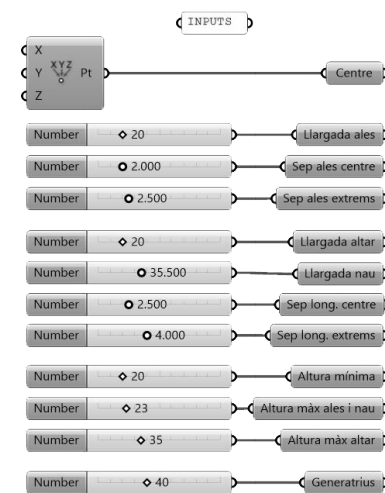


Figura 75. Inputs.

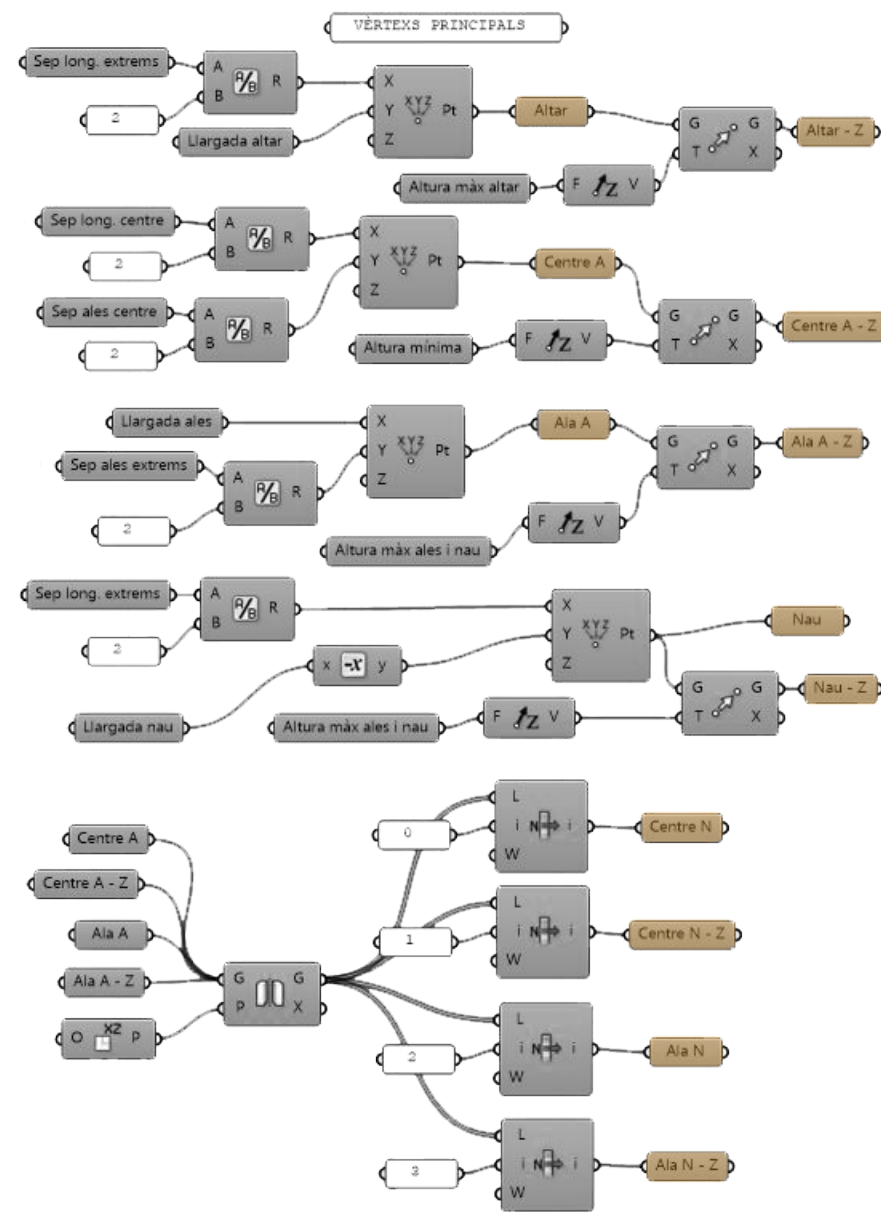


Figura 76. En primer lloc s'han determinat els vèrtexs dels paraboloides que corresponen als vèrtexs principals de l'edifici.

Inputs coneguts o aproximats (Figura 75):

- S'ha aproximat que l'eix menor fa 40 m i el major 55,5 m, dels quals 20 m corresponen a l'altar i 35,5 m a la nau.
- En la direcció de l'eix menor, els paraboloides se separen 2 m al centre i 2,5 m als extrems.
- En la direcció de l'eix major, els paraboloides se separen 2,5 m al centre i 4 m als extrems.
- L'altura mínima al centre de la creu és de 20 m.
- L'altura dels extrems de l'ala de la nau i de les ales laterals és de 23 m.
- L'altura màxima corresponent a l'extrem de l'ala de l'altar és de 15 m.

La majoria d'aquests inputs han estat mesurats sobre la documentació gràfica obtinguda i s'han ajustat durant el modelat per obtenir una forma que s'assimilés a l'edifici real. El modelatge ha consistit en la construcció d'una meitat de la catedral, per posteriorment fer una simetria respecte al seu eix major (Figures 76-78).

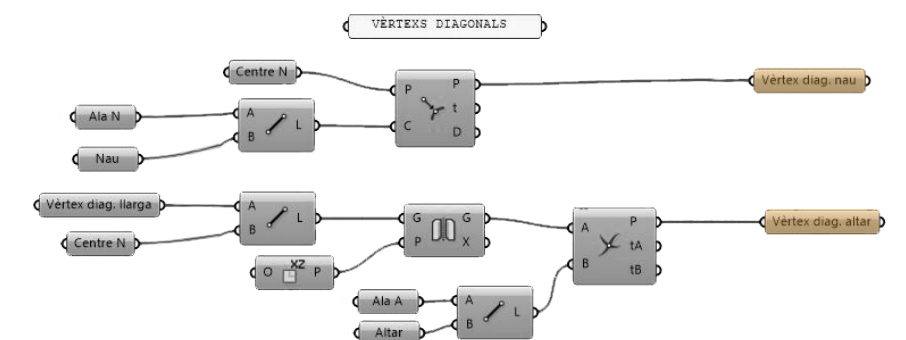


Figura 77. En segon lloc, s'han buscat els vèrtexs dels paraboloides situats sobre els costats del rombe de la planta.

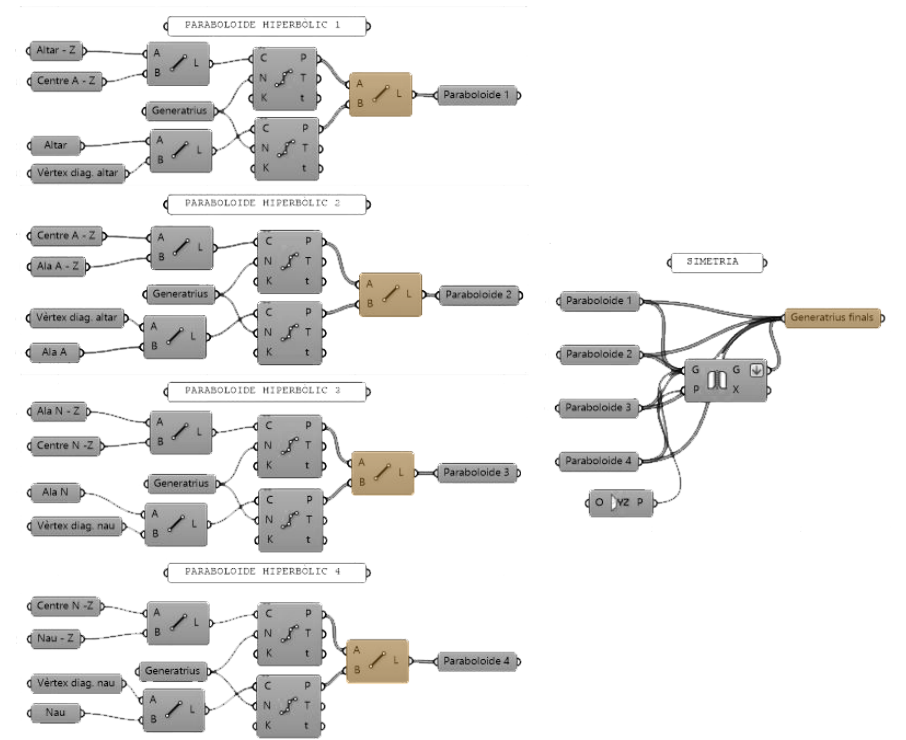


Figura 78. S'han unit els vèrtexs obtenint els costats dels paraboloides, que seguidament s'han connectat amb les generatrius. Per últim, s'ha efectuat la simetria.

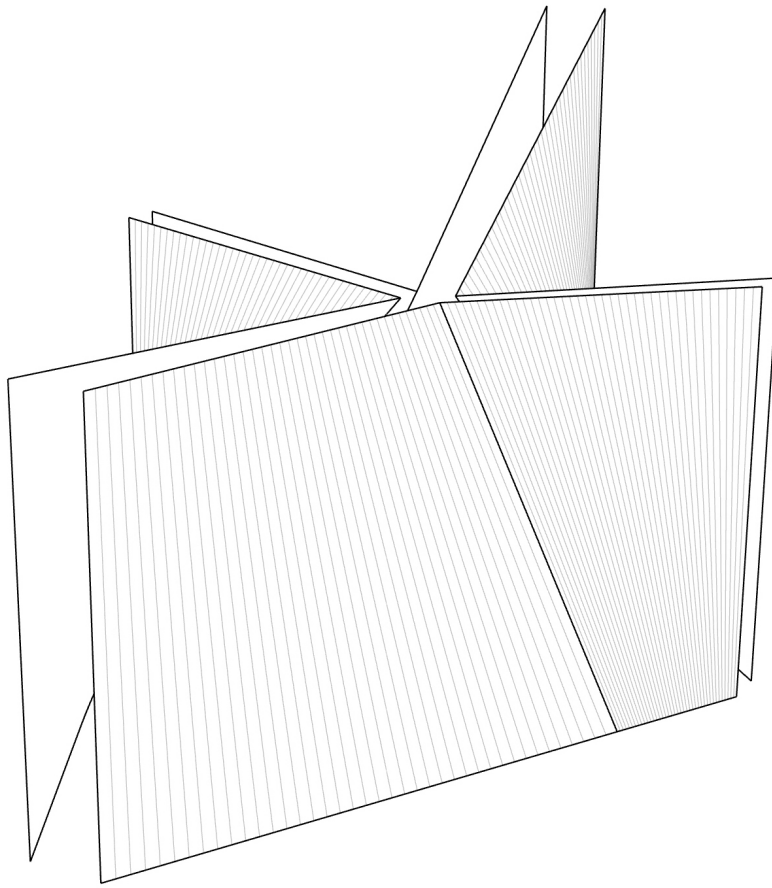


Figura 79. Modelació amb Grasshopper de la Catedral de Santa Maria.

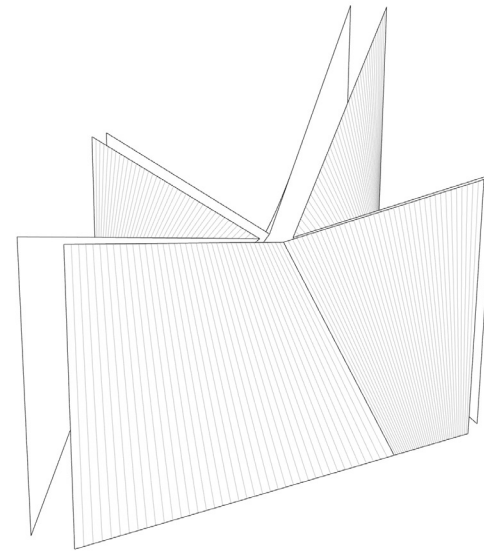


Figura 80. Disminueix l'altura mínima del centre de la creu, pronunciant els pendents de les ales i la curvatura dels paraboloides.

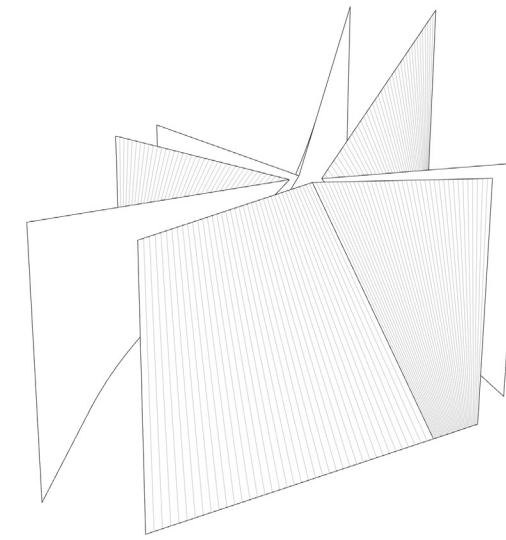


Figura 81. Els vèrtexs dels extrems de les quatre ales se separen dels eixos, fent que les esclatxes s'eixamplin.

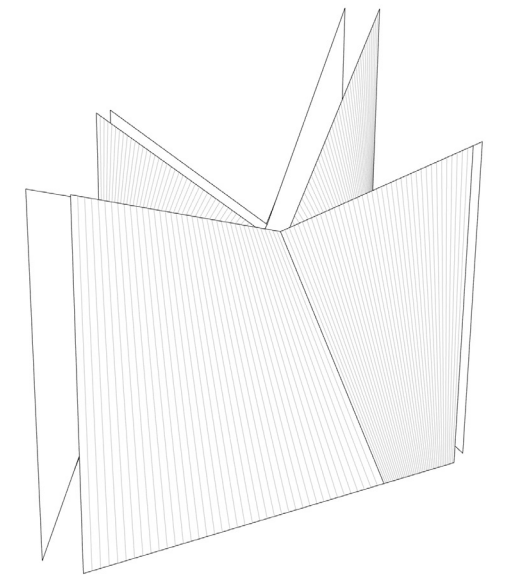


Figura 82. S'incrementen les altures màximes de les ales, pronunciant el seu pendent i la curvatura dels paraboloides.

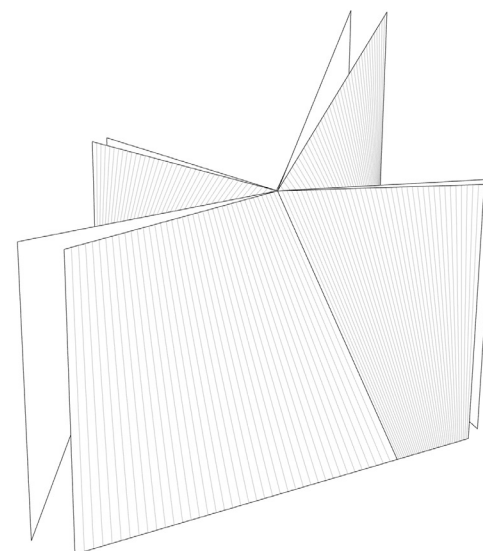


Figura 83. Els vèrtexs centrals es col·loquen sobre els eixos, de manera les arestes de la coberta conflueixen i les esclatxes es tanquen en aquest punt.

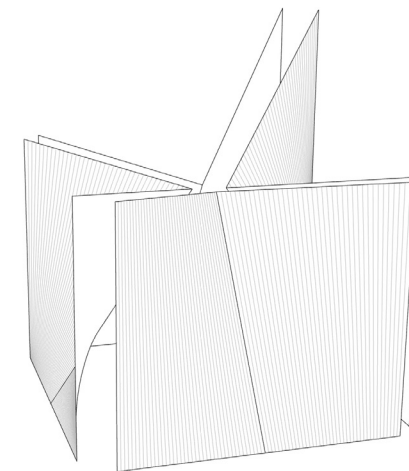


Figura 84. La llargada de l'ala de la nau s'igualava a la de les altres tres, fet que converteix el rombe de la planta en un quadrat.

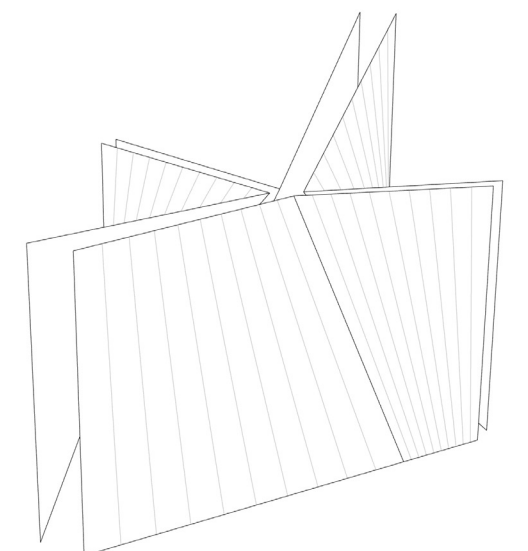


Figura 85. Aquest edifici materialitza les generatrius dels paraboloides. En aquest cas, s'ha reduït el seu nombre i observem que la imatge percebuda és diferent.

La documentació gràfica obtinguda ha permès determinar els vèrtexs dels paraboloides amb suficient exactitud per construir un model considerablement fidel a l'edifici real (Figura 79). Com hem vist, la majoria d'inputs feien referència a la posició d'aquests vèrtexs, per tant, aquestes han estat les variables que s'han alterat per generar diferents versions (Figures 80-85).

EL·LIPSOIDE

L'el·lipsoide és una superfície quàdrica definida amb la següent equació:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Es tracta d'una superfície tancada en la qual les tres seccions ortogonals principals són el·lipses (Figura 86). Els eixos d'aquestes el·lipses corresponen als coeficients a , b i c , amb els quals es poden establir dos casos particulars:

- Si dos dels coeficients són iguals, una de les seccions és una circumferència i les altres dues són dues el·lipses iguals. En aquest cas, la superfície esdevé un **esferoide** (Figura 87) i és el resultat de la revolució de les seccions en forma d'el·lipse.
- Si els tres coeficients són iguals, les tres seccions són circumferències i per tant, la superfície esdevé una **esfera** (Figura 88), la qual és el resultat de la revolució de qualsevol de les seccions.

Les referències trobades utilitzen principalment l'esfera, per això, s'ha considerat oportú centrar-se en aquesta forma.

L'esfera, com a superfície, es defineix com el conjunt de punts de l'espai tridimensional que es troben a la mateixa distància (radi) d'un punt, anomenat centre. Per tant, una esfera es determina coneixent la posició del seu centre i el radi.

Una de les seves propietats és que en interseccionar-se amb qualsevol pla, genera una secció en forma de circumferència. En l'anàlisi d'obres arquitectòniques amb formes esfèriques que es farà seguidament, és important considerar aquesta característica, ja que com és natural, en moltes ocasions els edificis estan formats per porcions d'esfera.

Així doncs, com comprovarem als exemples, les úniques variables que es poden alterar d'una forma esfèrica són la posició, el radi i el fragment d'esfera que s'ha pres (Figura 89).

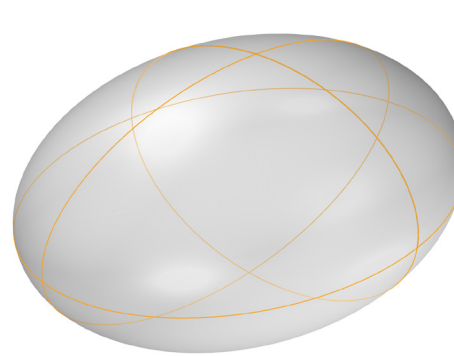


Figura 86. Exemple d'el·lipsoide, amb les tres seccions el·líptiques.

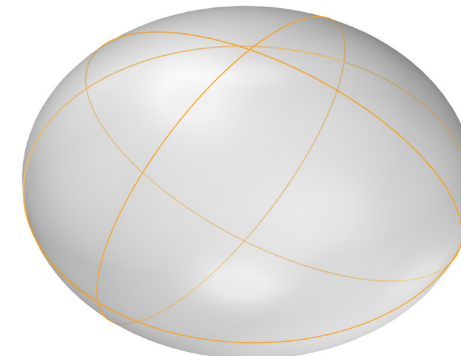


Figura 87. Exemple d'esferoide, amb dues seccions el·líptiques iguals i una en forma de circumferència.

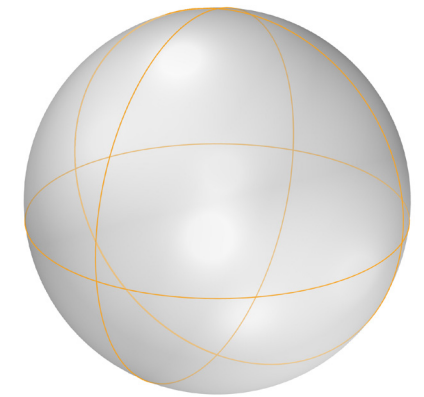


Figura 88. Exemple d'esfera, amb les tres seccions en forma de circumferència.

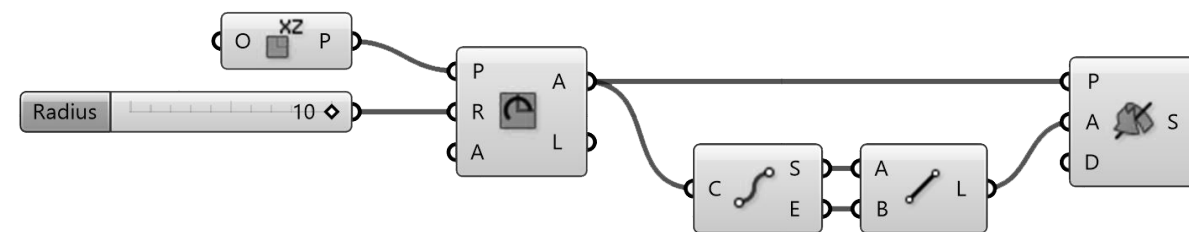


Figura 89. El Grasshopper inclou l'eina per crear directament una esfera a partir de la posició i el radi, però a l'exemple s'ha generat des d'un punt de vista constructiu, considerant que és el resultat de la revolució de mitja circumferència prenent el seu diàmetre com a eix.



Figura 90. Mercat d'abastaments d'Algeciras

MERCAT D'ABASTAMENTS D'ALGECIRAS

Eduardo Torroja, 1934-1935, Algeciras (Espanya)

L'enginyer Eduardo Torroja va ser uns dels protagonistes de la revolució tècnica que va suposar el desenvolupament del formigó armat i pretesat. Tot i projectar nombroses infraestructures d'enginyeria, també va entrar a l'arquitectura. La seva sensibilitat artística juntament amb les seves aptituds tècniques, li van permetre desenvolupar la idea de forma resistent com a concepte arquitectònic. Per aquest motiu, entre les seves obres trobem estructures laminars com la del Mercat d'Algeciras, també anomenat Mercat Enginyer Torroja (Figura 90). Aquest mercat va ser obra de Torroja, però va ser executat per l'arquitecte Manuel Sánchez Arcas el 1935.

L'edifici es compon d'una planta octogonal amb una cúpula esfèrica de 47,80 m de diàmetre que es recolza només en els 8 pilars del seu perímetre. El seu gruix arriba al mínim de 9 cm a la part central, convertint aquest edifici en una avançada obra estructural pel seu moment. L'edifici es completa amb 8 marquesines cilíndriques corresponents als costats de l'octògon, les quals tenen un paper crucial en el comportament estructural de l'edifici. Per últim, al centre de la cúpula trobem una claraboia també octogonal de 10 m de diàmetre.

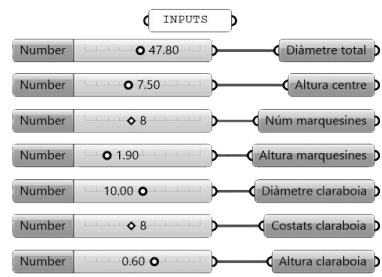


Figura 91. Inputs.

Inputs coneguts o aproximats (Figura 92):

- Es coneix que el diàmetre total és de 47,8 m.
- S'ha aproximat que l'altura del punt central respecte la base de la cúpula és de 7,5 m.
- S'ha aproximat que l'altura de les marquesines respecte a la base de la cúpula és de 1,9 m.
- Es coneix que el diàmetre de la claraboia fa 10 m.
- S'ha aproximat que la claraboia sobresurt uns 0,6 m.

A partir d'aquestes dades, s'ha modelat la coberta de l'edifici mitjançant Grasshopper (Figures 93-95).

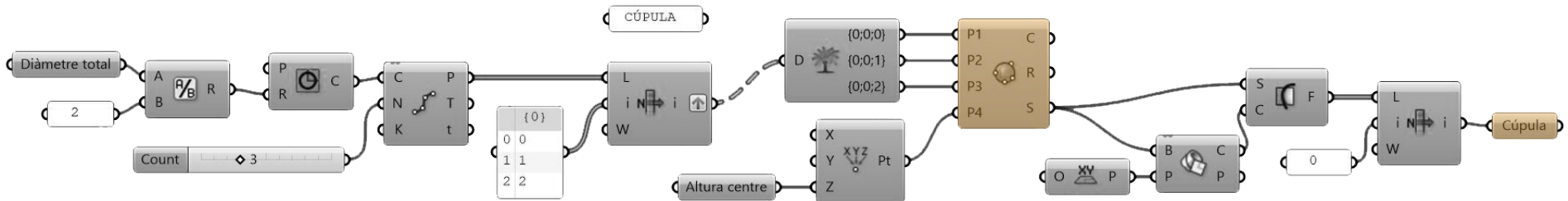


Figura 92. Primerament, es determina l'esfera a partir de 4 punts coneguts i d'aquesta esfera es pren la porció corresponent a la cúpula.

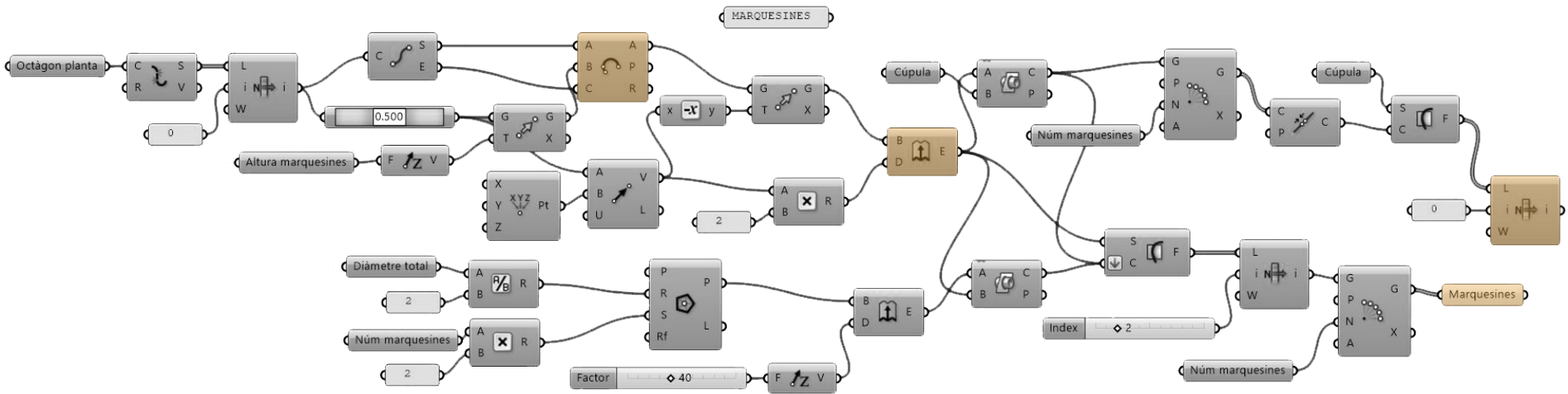


Figura 93. Es construeix una marquesina extrudint l'arc generatriu del cilindre situat sobre un dels costats de l'octògon de la planta. Del cilindre resultat de l'extrusió, s'agafa la part corresponent a la marquesina i es fa una matriu polar per obtenir les altres vuit. El cilindre també s'aprofita per trobar la intersecció entre les marquesines i la cúpula, per tal de retallar les parts sobrants.

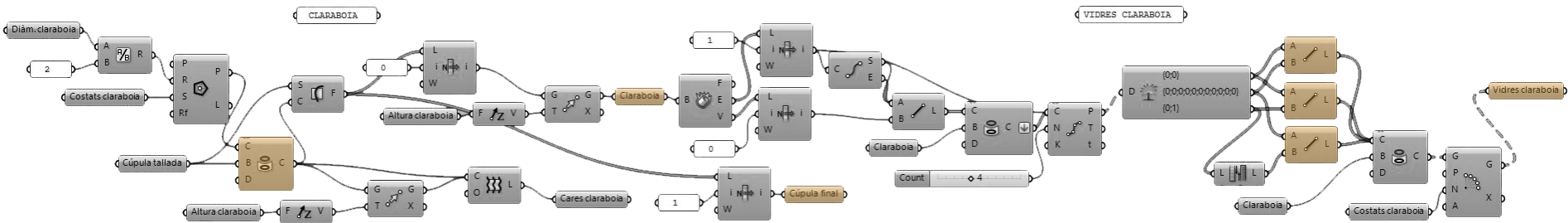


Figura 94. L'últim element a construir és la claraboia. Es troba el seu perímetre projectant l'octògon a la cúpula i s'utilitza per fer el forat corresponent. La superfície corresponent al forat s'eleva fins a l'altura màxima de la claraboia. En aquest punt es dibuixa l'espejament del vidre traçant les línies adients entre els seus costats i les seves diagonals.

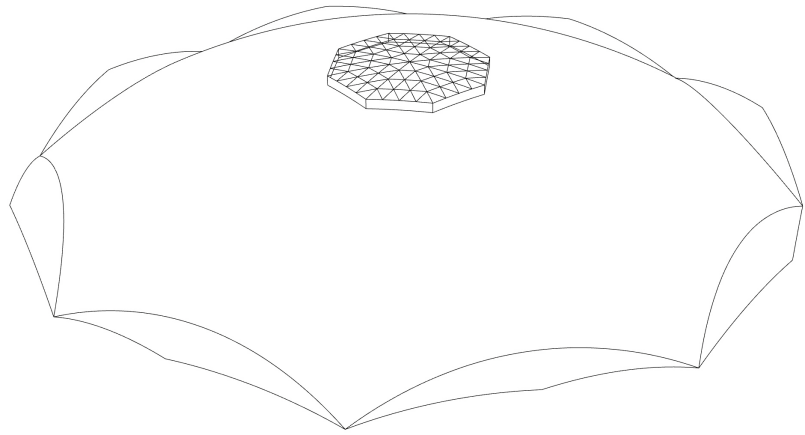


Figura 95. Model amb Grasshopper del Mercat d'Algeciras.

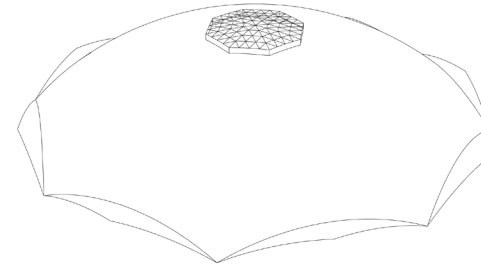


Figura 96. L'altura del centre de la cúpula ha augmentat lleugerament. La curvatura de l'esfera es pronuncia i les marquesines es fan més estretes.

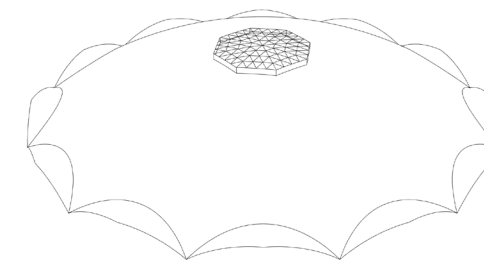


Figura 97. El nombre de marquesines ha passat de 8 a 12, fent que es tanquin i augmenti la seva curvatura.

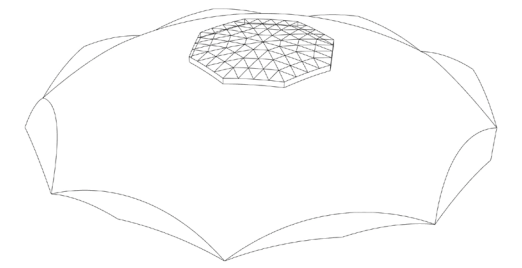


Figura 98. S'ha ampliat la claraboia establint el seu diàmetre a 15 m. Es comprova que el seu modelatge és independent i no influeix a la geometria general de la cúpula.

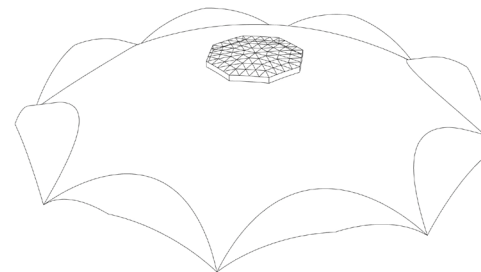


Figura 99. S'incrementa l'altura de les marquesines. Això fa que la seva intersecció amb la cúpula s'acosti més al centre i per tant, que les marquesines s'eixamplin.

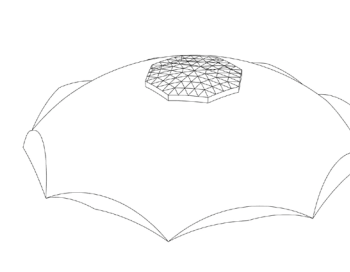


Figura 100. Disminueix el diàmetre total, però l'altura es manté. Això fa que l'esfera implícita sigui més petita, per tant la curvatura s'aprecia més pronunciada.

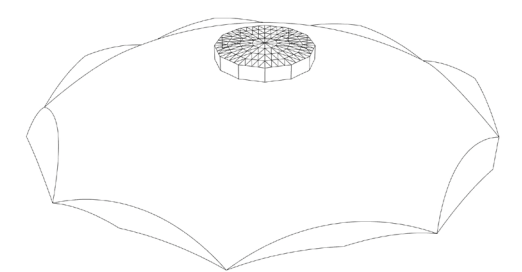
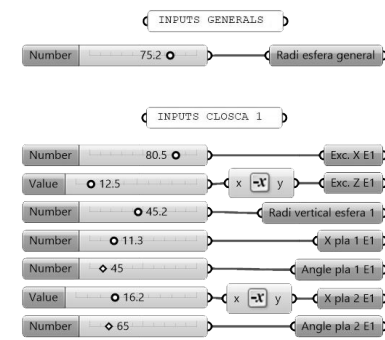


Figura 101. Les característiques de la claraboia són inputs amb una incidència localitzada. Comprovem que l'especejament del vidre s'adapta al nombre de costats.

Gràcies a la documentació gràfica obtinguda, el resultat obtingut és molt similar a l'edifici real (Figura 95).

A partir del modelatge parametritzat de Grasshopper, s'ha experimentat amb l'alteració dels inputs (Figures 96-101). S'ha observat que els inputs que fan variar el radi de l'esfera tenen la incidència més directa a la forma general final. Un canvi en el radi de l'esfera implica una alteració de la curvatura de la cúpula, que en conseqüència també afecta a la forma de les marquesines. Altres inputs incideixen només en la claraboia, de manera que la seva variació provoca un canvi més localitzat.

Aquesta solució i l'edifici resultant es consideren una magnífica expressió de la fusió entre el disseny i l'enginyeria (Figura 102).

[illegible]

5

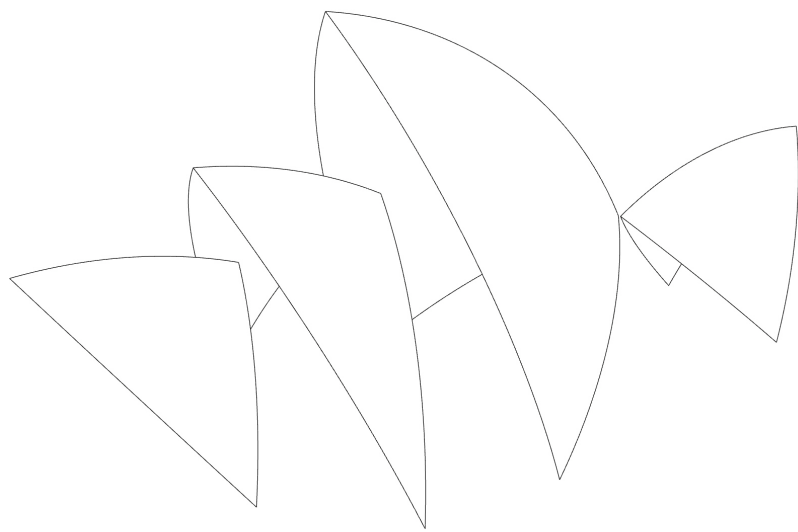


Figura 105. Model amb Grasshopper de les quatre closques principals de l'Òpera de Sydney.

En aquest cas, el modelat amb Grasshopper no era especialment complicat. A més, com hem vist, gràcies a la similitud de les closques, s'ha pogut repetir la programació i això ha agilitzat el procés. Per contra, aquest edifici ha requerit més esforç d'anàlisi previ per comprendre exactament la lògica de la geometria i per obtenir les dades clau per a la seva definició.

El resultat obtingut s'assimila satisfactòriament a l'edifici i tot i que no inclou l'edifici complet, aconsegueix representar la imatge icònica d'aquest (Figura 105).

Mitjançant els paràmetres inicials, s'han pogut produir unes variacions que manifesten com cada un dels inputs influeix a la geometria final (106-111). Evidentment, el radi de l'esfera generatriu és el condicionant més important, ja que és l'origen de totes les peces presents a la forma.

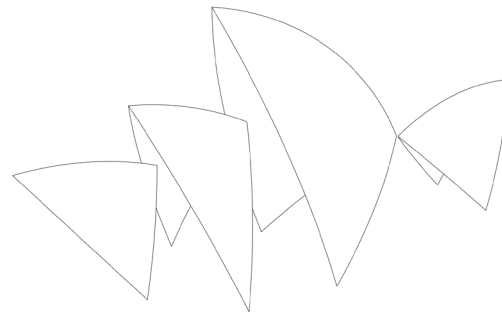


Figura 106. Si augmenta el radi de l'esfera, les closques representen una porció relativament més petita, per aquest motiu disminueix la curvatura i els recolzaments s'acosten.

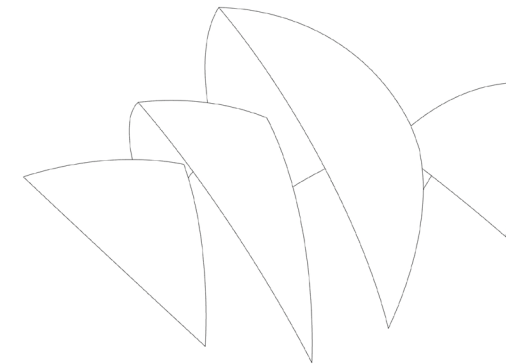


Figura 107. L'augment del radi de l'arc superior suposa un acostament cap al centre de l'esfera del pla d'intersecció que genera aquest arc. Per tant, la porció presa és més gran, fent que, no només augmenti la dimensió de la closca, sinó l'obertura dels seus recolzaments.

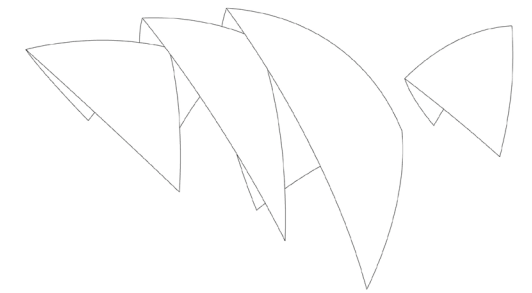


Figura 108. L'edifici està situat en un podi sobre l'aigua amb diversos nivells, per això els recolzaments de les closques es troben a diferents altures. Aquest paràmetre referent a la posició també es pot ajustar.

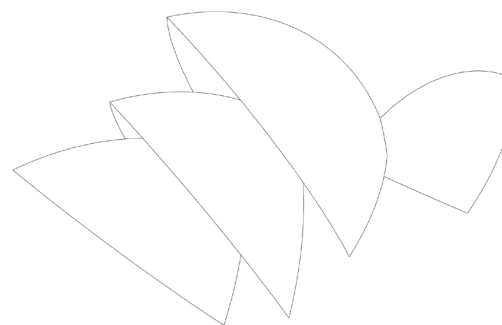


Figura 109. La variació dels angles dels plans de tall fa que, sense alterar el radi de l'arc superior, les closques s'obrin o es tanquin en el sentit de l'eix de simetria.



Figura 110. També podem variar la posició dels plans de tall en sentit longitudinal. Això crea uns nous límits a les closques paral·lels als originals.



Figura 111. Els paràmetres referents a la posició de les closques permeten desplaçar-les al llarg de l'eix de simetria central.

CONCLUSIONS

La investigació i l'anàlisi dutes a terme al llarg del treball em permeten abordar certes qüestions fruit dels nous coneixements adquirits, així com de les reflexions personals que aquests han propiciat.

Al primer apartat s'explicava breument el paper que ha tingut la geometria en l'arquitectura durant l'últim segle. Seguint un breu fil cronològic que recollia alguns arquitectes de referència, s'entenia com la geometria va passar de ser una eina per a fins estructurals, a un recurs descriptiu de geometries complexes i de caràcter més artístic. La majoria d'obres que s'han analitzat al cos del treball fan palesa aquesta transició. Una de les evidències és que les obres més antigues, que són la Torre Shukhov (1918) i el Mercat d'Algeciras (1934-1935), van ser projectades per enginyers, mentre que els edificis relativament més recents, com la Catedral de Santa Maria de Tokyo (1964), l'Òpera de Sydney (1973) o la Torre Canton (2009), han estat dissenyats per arquitectes que comptaven amb la col·laboració d'enginyers.

Els autors de les primeres van elegir les formes geomètriques pel seu comportament estructural, és a dir, van descobrir que es corresponien als principis de la física i les estructures. Així doncs, podríem dir que utilitzaven aquestes formes d'una manera més natural.

Per contra, les obres dels arquitectes han seguit un procés invers. Hem vist, sobretot en el cas de l'Òpera de Sydney, que es buscava un sistema estructural i geomètric que fes possible el disseny. Podríem entendre aquesta aplicació de la geometria com una pràctica més artificial, ja que les formes són el resultat de la creativitat i l'expressivitat dels autors.

Les dues pràctiques són vàlides i justificades, sobretot situades en context. Els primers edificis se situen en una època on el material era més car que la mà d'obra, per aquest motiu les seves formes segueixen una lògica estructural estricta que els permet reduir-ne la quantitat. L'exemple més clar són les estructures laminars que busquen els gruixos mínims.

Al llarg del segle, aquesta relació econòmica s'ha anat invertint, per això actualment els dissenys són molt més flexibles, qualsevol forma és possible sempre que es pugui racionalitzar per optimitzar els processos de disseny i construcció.

Per altra banda, l'estudi i la comprensió de les diverses formes, així com la seva aplicació, han demostrat la inqüestionable capacitat de simplificació i racionalització que aporta la geometria als dissenys. Podria resultar fins i tot sorprenent, que en un temps relativament curt i sense documentació de qualitat, he estat capaç de modelar edificis que a simple vista semblen complexes. La realitat és que les relacions geomètriques que els regeixen permeten definir la forma a partir de poques dades. Si en aquest fet li afegeixes la parametrització, la tasca del modelatge resulta relativament senzilla, ja que els pocs inputs que s'utilitzen es poden ajustar variant simultàniament la forma. En el meu cas, aquesta possibilitat m'ha ajudat a trobar la forma que reproduïa més fidelment l'edifici original, però puc imaginar que de la mateixa manera, en un procés de disseny, això permet experimentar àgilment amb la forma per tal d'acabar plasmant la idea que es desitja.

Així doncs, es corrobora la importància de l'existència d'unes relacions geomètriques dins d'un disseny, però a la vegada també cal ser conscient de la rigidesa que aquestes donen, ja que al cap i a la fi, cada una d'elles és una premissa condicionant. En cada disseny s'ha de trobar l'equilibri entre la total arbitrarietat i la dependència absoluta entre les parts.

Per últim, tenint en compte la utilitat de geometria com a eina de disseny, m'agradaria reflexionar sobre el paper que se li dona dins dels estudis d'arquitectura, basant-me evidentment en la meua pròpia experiència.

Els coneixements necessaris per dur a terme aquest treball es van donar sobradament durant el primer curs de la carrera, però d'una manera completament abstracta i desvinculada de l'arquitectura. En altres cursos de representació arquitectònica han pogut aparèixer conceptes relacionats amb la geometria, però d'un nivell relativament baix, ja que no eren la part important de l'assignatura. Després de fer aquest treball, penso que seria interessant rebre els coneixements de geometria com l'eina descriptiva que són a l'hora de dissenyar. A més, tenint en compte la popularització de l'arquitectura de free-form, considero quasi imprescindible dotar als futurs arquitectes d'unes bases més sòlides per poder-se desenvolupar en aquest camp.

FONT DE LES IMATGES

Figura 1. Cripta Güell. Les Pedres de Barcelona, 2015. www.flickr.com

Figura 2. Rayos Cósmicos. Noahedits, 2019. commons.wikimedia.org

Figura 3. Gimnàs Nacional Yoyogi. Naoya Fujii, 2008. www.flickr.com

Figura 4. Pavelló Alemany E67. Guerinf, 2009. commons.wikimedia.org

Figura 5. Museu Guggenheim. MykReeve, 2000. commons.wikimedia.org

Figura 6. Centre Pompidou-Metz. Jean-Pierre Dalbéra, 2010. www.flickr.com

Figura 7. Punt. Creació pròpia.

Figura 8. Línia. Creació pròpia.

Figura 9. Pla. Creació pròpia.

Figura 10. Volum. Creació pròpia.

Figura 11. Extrusió. Creació pròpia.

Figura 12. Escala. Creació pròpia.

Figura 13. Rotació. Creació pròpia.

Figura 14. Extrusió + Escala. Creació pròpia.

Figura 15. Extrusió + Rotació. Creació pròpia.

Figura 16. Extrusió + Escala + Rotació. Creació pròpia.

Figura 17. El·lipsoide. Rectas, 2020. commons.wikimedia.org

Figura 18. Con el·líptic. Rectas, 2020. commons.wikimedia.org

Figura 19. Paraboloides. Rectas, 2020. commons.wikimedia.org

Figura 20. Cilindres. Rectas, 2020. commons.wikimedia.org

Figura 21. Hiperboloides. Rectas, 2020. commons.wikimedia.org

Figura 22. Hipèrbola. Creació pròpia.

Figura 23. Hiperboloide de dues fulles. Creació pròpia.

Figura 24. Hiperboloide d'una fulla. Creació pròpia.

Figura 25. Definició hiperboloide. Creació pròpia.

Figura 26. Grasshopper hiperboloide. Creació pròpia.

Figura 27. Torre Shukhov. Sergey Rodovnichenko, 2009. www.flickr.com

Figura 28. Inputs Shukhov. Creació pròpia.

Figura 29. Grasshopper 1 Shukhov. Creació pròpia.

Figura 30. Grasshopper 2 Shukhov. Creació pròpia.

Figura 31. Model Shukhov. Creació pròpia.

Figura 32. Variació Shukhov 1. Creació pròpia.

Figura 33. Variació Shukhov 2. Creació pròpia.

Figura 34. Variació Shukhov 3. Creació pròpia.

Figura 35. Variació Shukhov 4. Creació pròpia.

Figura 36. Variació Shukhov 5. Creació pròpia.

Figura 37. Variació Shukhov 6. Creació pròpia.

Figura 38. Torre de Canton. そらみみ, 2017. commons.wikimedia.org

Figura 39. Inputs Torre Canton. Creació pròpia.

Figura 40. Grasshopper Torre Canton. Creació pròpia.

Figura 41. Model Torre Canton. Creació pròpia.

Figura 42. Variació Torre Canton 1. Creació pròpia.

Figura 43. Variació Torre Canton 2. Creació pròpia.

Figura 44. Variació Torre Canton 3. Creació pròpia.

Figura 45. Variació Torre Canton 4. Creació pròpia.

Figura 46. Variació Torre Canton 5. Creació pròpia.

Figura 47. Variació Torre Canton 6. Creació pròpia.

Figura 48. Catedral de Brasília. Prandrade, 2015. commons.wikimedia.org

Figura 49. Inputs Catedral de Brasília. Creació pròpia.

Figura 50. Grasshopper 1 Catedral de Brasília. Creació pròpia.

Figura 51. Grasshopper 2 Catedral de Brasília. Creació pròpia.

Figura 52. Model Catedral de Brasília. Creació pròpia.

Figura 53. Variació Catedral de Brasília 1. Creació pròpia.

Figura 54. Variació Catedral de Brasília 2. Creació pròpia.

Figura 55. Variació Catedral de Brasília 3. Creació pròpia.

Figura 56. Variació Catedral de Brasília 4. Creació pròpia.

Figura 57. Variació Catedral de Brasília 5. Creació pròpia.

Figura 58. Variació Catedral de Brasília 6. Creació pròpia.

Figura 59. Paraboloide el·líptic. Creació pròpia.

Figura 60. Paraboloide hiperbòlic. Creació pròpia.

Figura 61. Definició paraboloide hiperbòlic. Creació pròpia.

Figura 62. Grasshopper paraboloide hiperbòlic. Creació pròpia.

Figura 63. Los Manantiales. Gallery 400. www.flickr.com

Figura 64. Inputs Los Manantiales. Creació pròpia.

Figura 65. Grasshopper 1 Los Manantiales. Creació pròpia.

Figura 66. Grasshopper 2 Los Manantiales. Creació pròpia.

Figura 67. Model Los Manantiales. Creació pròpia.

Figura 68. Variació Los Manantiales 1. Creació pròpia.

Figura 69. Variació Los Manantiales 2. Creació pròpia.

Figura 70. Variació Los Manantiales 3. Creació pròpia.

Figura 71. Variació Los Manantiales 4. Creació pròpia.

Figura 72. Variació Los Manantiales 5. Creació pròpia.

Figura 73. Variació Los Manantiales 6. Creació pròpia.

Figura 74. Catedral de Santa Maria. Cedida per Albert Brumwell, 2017.

Figura 75. Inputs Catedral de Santa Maria. Creació pròpia.

Figura 76. Grasshopper 1 Catedral de Santa Maria. Creació pròpia.

Figura 77. Grasshopper 2 Catedral de Santa Maria. Creació pròpia.

Figura 78. Grasshopper 3 Catedral de Santa Maria. Creació pròpia.

Figura 79. Model Catedral de Santa Maria. Creació pròpia.

Figura 80. Variació Catedral de Santa Maria 1. Creació pròpia.

Figura 81. Variació Catedral de Santa Maria 2. Creació pròpia.

Figura 82. Variació Catedral de Santa Maria 3. Creació pròpia.

Figura 83. Variació Catedral de Santa Maria 4. Creació pròpia.

Figura 84. Variació Catedral de Santa Maria 5. Creació pròpia.

Figura 85. Variació Catedral de Santa Maria 6. Creació pròpia.

Figura 86. El·lipsoide. Creació pròpia.

Figura 87. Esferoide. Creació pròpia.

Figura 88. Esfera. Creació pròpia.

Figura 89. Grasshopper esfera. Creació pròpia.

Figura 90. Mercat d'Algeciras. Falconaumann, 2010. commons.wikimedia.org

Figura 91. Inputs Mercat d'Algeciras. Creació pròpia.

Figura 92. Grasshopper 1 Mercat d'Algeciras. Creació pròpia.

Figura 93. Grasshopper 2 Mercat d'Algeciras. Creació pròpia.

Figura 94. Grasshopper 3 Mercat d'Algeciras. Creació pròpia.

Figura 95. Model Mercat d'Algeciras. Creació pròpia.

Figura 96. Variació Mercat d'Algeciras 1. Creació pròpia.

Figura 97. Variació Mercat d'Algeciras 2. Creació pròpia.

Figura 98. Variació Mercat d'Algeciras 3. Creació pròpia.

Figura 99. Variació Mercat d'Algeciras 4. Creació pròpia.

Figura 100. Variació Mercat d'Algeciras 5. Creació pròpia.

Figura 101. Variació Mercat d'Algeciras 6. Creació pròpia.

Figura 102. Òpera de Sydney. Noema Pérez, 2011. www.flickr.com

Figura 103. Inputs Òpera de Sydney. Creació pròpia.

Figura 104. Grasshopper Òpera de Sydney. Creació pròpia.

Figura 105. Model Òpera de Sydney. Creació pròpia.

Figura 106. Variació Òpera de Sydney 1. Creació pròpia.

Figura 107. Variació Òpera de Sydney 2. Creació pròpia.

Figura 108. Variació Òpera de Sydney 3. Creació pròpia.

Figura 109. Variació Òpera de Sydney 4. Creació pròpia.

Figura 110. Variació Òpera de Sydney 5. Creació pròpia.

Figura 111. Variació Òpera de Sydney 6. Creació pròpia.

BIBLIOGRAFIA

Jane Burry i Mark Burry (2010). *The new mathematics of architecture*. Thames&Hudson.

Francis D. K. Ching (1975). *Architecture. Form, Space & Order*.

Martijn Veltkamp (2007). *Free FromStructural Desing. Schemes Systems & Prototypes of Structures for Irregular Shaped Buildings*. IOS Press, Delft University Press.

Maite Bravo Martínez (2015). *Lógicas paramétrica en la arquitectura del siglo XX*. Tesi doctoral.

Daniel Davis (2013). *A history of Parametric*.

Asterios Agkathidis (2015). *Generative Design*. Laurence King Publishing Ltd.

Sarah Hadianti (2013). *A history of Parametric*.

www.sydneyoperahouse.com, Spherical Solution.

Juan Monterde (2013). *Arquitectura i matemàtiques. La geometria al servei de l'art: de Gaudí a Gehry*. Revista Mètode, Universitat de València.

Esmond Ried (1988). *Understanding Buildings: A Multidisciplinary Approach*. MIT Press.

Elizabeth C. English (2005). *Vladimir Shukhov and the Invention of Hyperboloid Structures*. SEI 2005 Structures Congress.

Arch20 Intership Team. *Case Study: The Parametric Twist of Canton Tower*. Arch20.

Andrés Martín, Francisco Ramón i Fadón Salazar, Fernando (2004). *Análisis gráfico de las obras emblemáticas de Félix Candela*. XVI Congreso Internacional de Ingeniería Gráfica.

Josefina Melgosa (2016). *El Mercado Torroja de Algeciras*. Revista del Colegio Oficial de Ingenieros Industriales de Andalucía Occidental.

www.sydneyoperahouse.com, Spherical Solution.

www.wikipedia.com

www.archdaily.com

www.parametric-architecture.com